Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Севастопольский государственный университет»

№2(34)
2026

Выходит 4 раза в год

ISSN 2658-4727

АВТОМАТИЗАЦИЯ И ИЗМЕРЕНИЯ В МАШИНО-ПРИБОРОСТРОЕНИИ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Севастополь, 2026

Научный журнал
№2(34) (2026)

АВТОМАТИЗАЦИЯ И ИЗМЕРЕНИЯ В МАШИНО- ПРИБОРОСТРОЕНИИ

Главный редактор
Филипович О.В., к.т.н., доц.
(г. Севастополь)
Заместитель главного редактора
Балакин А.И., к.т.н., доц.
(г. Севастополь)
Научный редактор
Бохонский А.И., д.т.н., проф.
(г. Севастополь)

Редакционная коллегия
Вартанов М.В., д.т.н., проф.
(г. Москва)
Греков Н.А., д.т.н., проф.
(г. Севастополь)
Доронина Ю.В., д.т.н., доц.
(г. Севастополь)
Жмудь В.А., д.т.н., доц.,
(г. Новосибирск)
Краснодубец Л.А., д.т.н., проф.
(г. Севастополь)
Моисеев Д.В., д.т.н., доц.
(г. Севастополь)
Обжерин Ю.Е., д.т.н., проф.
(г. Севастополь)
Осипов К.Н., д.т.н., доц.
(г. Севастополь)
Песчанский А.И., д.т.н., проф.
(г. Севастополь)
Петрешин Д.И., д.т.н., проф.
(г. Брянск)
Прейс В.В., д.т.н., проф.
(г. Тула)
Щенятский А.В., д.т.н., проф.
(г. Севастополь)
Заморёнов М.В., к.т.н., доц
(г. Севастополь)
Майстришин М.М., к.т.н., доц.
(г. Севастополь)
Рапацкий Ю.Л., к.т.н., доц.
(г. Севастополь)

СОДЕРЖАНИЕ

АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССАМИ И ПРОИЗВОДСТВАМИ

Майстришин М.М., Теленко А.В. Модернизация технологического процесса конденсации хладагента станции охлаждения газа **4**

Никишин В.В., Багаев А.В., Подруцкий В.С. Разработка автоматизированной лебёдки для погружных океанологических приборов **12**

Бохонский А.И., Варминская Н.И. Преобразование оптимального углового переносного ускорения в эквивалентное по энергоемкости релейное **19**

Филипович О.В., Вандышев Д.А., Тиунова А.В., Камцев В.А. Селективная сборка узла шатунно-поршневой группы двигателей внутреннего сгорания **27**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

Песчанский А.И. Стационарные характеристики ненадежной восстанавливаемой многокомпонетной системы обслуживания с потерями **33**

Токарев Д.А., Кудряшов А.В., Дементьев К.В. Применение кривых Дубинса для генерации оптимальных траекторий **47**

Заморёнов М.В., Заморёнов И.М., Малицкая А.А., Шевченко В.И. Использование метода траекторий при моделировании киберфизической системы с заменой элемента при контроле **54**

Кротов К.В. Математические модели оптимизации составов партий деталей и порядков их обработки в конвейерных системах с использованием целочисленного линейного программирования **60**

Абибуллаев Э.А. Численный метод стабилизации обучения генеративно-состязательных моделей с использованием метрики Вассерштейна для аппроксимации распределений биомедицинских данных **77**

Крамарь В.А., Евстафьева Е.В., Залата О.А., Московчук О.Б. Математическая формализация и статистические методы анализа элементного и пестицидного статусов в биологических субстратах матери и новорождённого **86**

Чаленков Н.И., Заморёнов М.В., Заморёнов И.М., Ченгарь О.В. Верификация модели системы с заменой элемента при её контроле **96**

ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ

Балакин А.И. Влияние погрешности измерения диаметра вала на показатели надёжности двигателя внутреннего сгорания **101**

Бурлака В.В. Устройство балансировки и поэлементного измерения напряжения литиевых батарей **109**

Подписной индекс научного журнала 85768 по интернет-каталогу «Пресса России».

Научный журнал входит в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук», утвержденный ВАК Минобрнауки РФ, по следующим научным специальностям:

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ производствами (технические науки);

2.2.8. Методы и приборы контроля и диагностики материалов, изделий, веществ и природной среды производствами (технические науки);

2.3.3 Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами (технические науки).

Учредитель и издатель: ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет» ул. Университетская, 33. Севастополь, 299053.

© ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»
© Авторы статей

Scientific Journal
No2(34) (2026)

AUTOMATION AND MEASUREMENT IN MECHANICAL ENGINEERING AND INSTRUMENT ENGINEERING

Editor-in-Chief
Filipovich O.V., candidate of technical sciences, docent (Sevastopol)
Deputy Editor-in-Chief
Balakin A.I., candidate of technical sciences, docent (Sevastopol)
Scientific Editor
Bokhonsky A.I., doctor of technical sciences, professor (Sevastopol)

Editorial Board
Vartanov M.V., doctor of technical sciences, professor (Moscow)
Grekov N.A., doctor of technical sciences, professor (Sevastopol)
Doronina Yu.V., doctor of technical sciences, docent (Sevastopol)
Zhmud V.A., doctor of technical sciences, docent (Novosibirsk)
Krasnodubets L.A., doctor of technical sciences, professor (Sevastopol)
Moiseev D.V., doctor of technical sciences, docent (Sevastopol)
Obzherin Yu.E., doctor of technical sciences, professor (Sevastopol)
Osipov K.N., doctor of technical sciences, docent (Sevastopol)
Peschanskiy A.I., doctor of technical sciences, professor (Sevastopol)
Petreshin D.I., doctor of technical sciences, professor (Bryansk)
Preis V.V., doctor of technical sciences, professor (Tula)
Schenyatsky A.V., doctor of technical sciences, professor (Sevastopol)
Zamoryonov M.V., candidate of technical sciences, docent (Sevastopol)
Maystrishin M.M., candidate of technical sciences, docent (Sevastopol)
Rapatsky Yu.L., candidate of technical sciences, docent (Sevastopol)

CONTENTS

AUTOMATION AND CONTROL OF PROCESSES AND PRODUCTIONS

Maistrishin M.M., Telenko A.V. Modernization of the refrigerant condensation process of the gas cooling station **4**
Nikishin V.V., Bagaev A.V., Podrutcky V.S. Development of an automated winch for submersible oceanological instruments **12**
Bohonsky A.I., Varminskya N.I. Conversion of optimal angular translational acceleration to relay equivalent **19**
Filipovich O.V., Vandyshev D.A., Tiunova A.V., Kamtsev V.A. Selective assembly of the connecting rod and piston group unit of internal combustion engines **27**

MATHEMATICAL MODELLING, NUMERICAL METHODS AND SOFTWARE PACKAGES

Peschansky A.I. Stationary characteristics of an unreliable recoverable multi-component maintenance system with losses **33**
Tokarev D.A., Kudryashov A.V., Dementiev K.V. Using Dubins curves to make optimal pathways **47**
Zamoryonov M.V., Zamoryonov I.M., Malitskaya A.A., Shevchenko V.I. Using the trajectory method in modeling a cyber-physical system with element replacement during its monitoring **54**
Krotov K.V. Mathematical models of composition optimization batches of parts and their processing procedures in conveyor systems using integer linear programming **60**
Abibulaev E.A. A numerical method for stabilizing the training of generative adversary models using the Wasserstein metric for approximation of biomedical data distributions **77**
Kramar V.A., Evstafieva E.V., Zalata O.A., Moskovchuk O.B. The mathematical formalization and statistical methods of analysis of elemental and pesticide status in biological substrates of the mother and the newborn **86**
Chalenkov N.I., Zamoryonov M.V., Zamoryonov I.M., Chengar O.V. System model verification with element replacement during control **96**

MEASURING INSTRUMENTS AND METHODS

Balakin A.I. The effect of shaft diameter measurement error on the reliability indicators of an internal combustion engine **101**
Burlaka V.V. Device for lithium batteries balancing and per-element voltage measuring **109**

Subscription index of the scientific journal is 85768 according to the Internet catalogue "Press of Russia".
The scientific journal is included in the "List of peer-reviewed scientific editions, in which the main results of dissertations for the degree of Candidate of sciences, for the degree of Doctor of sciences should be published", approved by the Higher Attestation Commission of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, in the following scientific specialties:
1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and software packages
2.2.8. Methods and devices for monitoring and diagnostics of materials, products, substances and the natural environment
2.3.3. Automation and control of technological processes and productions
Founder and publisher: FSAEI HE «Sevastopol State University» ul. Universitetskaya, 33. Sevastopol, 299053.
© FSAEI HE «Sevastopol State University»
© Authors of the articles

УДК 681.5:621.6

МОДЕРНИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА КОНДЕНСАЦИИ ХЛАДАГЕНТА СТАНЦИИ ОХЛАЖДЕНИЯ ГАЗА

Майстришин М.М.[1], Теленко А.В.[2]

MODERNIZATION OF THE REFRIGERANT CONDENSATION PROCESS OF THE GAS COOLING STATION

Maistrishin M.M.[1], Telenko A.V.[2]

Аннотация. *Исследуется модернизация технологического процесса конденсации хладагента (пропана) в холодильном цикле станции охлаждения газа. Обоснована актуальность повышения эффективности и надежности работы конденсатора хладагента в условиях эксплуатации газотранспортных объектов Крайнего Севера. Предложены технические решения, основанные на внедрении замкнутой системы автоматического регулирования частоты вращения вентиляторов конденсатора. Реализация предложенных мероприятий позволяет повысить энергоэффективность холодильного цикла, снизить влияние человеческого фактора и обеспечить стабильность технологических параметров.*

Abstract. *This paper explores the modernization of the refrigerant (propane) condensation process in the refrigeration cycle of a gas cooling station. The need for improving the efficiency and reliability of the refrigerant condenser under the operating conditions of gas transmission facilities in the Far North is substantiated. Technical solutions based on the introduction of a closed-loop system for automatic speed control of condenser fans are proposed. The implementation of the proposed measures makes it possible to increase the energy efficiency of the refrigeration cycle, reduce the influence of the human factor and ensure the stability of technological parameters.*

Ключевые слова. *Станция охлаждения газа, конденсация пропана, холодильный цикл, автоматизация, конденсатор.*

Keywords. *Gas cooling station, propane condensation, refrigeration cycle, automation, condenser.*

Введение.

Природный газ – один из наиболее востребованных и широко используемых ресурсов в промышленности, энергетике и коммунальной сфере. Значительное содержание газа в пластах сосредоточено на севере России, прежде всего в Ямало-Ненецком автономном округе (ЯНАО), который является основным регионом добычи и транспортировки газа. Одним из крупнейших объектов газодобычи – Ямбургское месторождение, на базе которого функционирует линейно-производственное управление магистральных газопроводов (ЛПУМГ). Особенность этих территорий заключается в сложных климатических условиях. Месторождение характеризуется высоким

содержанием газа в пластах, что требует обеспечение непрерывной и безотказной работы всей системы добычи, подготовки и транспортировки газа [1].

В летний период перед подачей на магистральный газопровод, природный газ проходит несколько стадий подготовки: очистку от механических примесей, компримирование (повышение давления газа с помощью компрессора) и охлаждение. Перечисленные процессы образуют единый технологический цикл подготовки газа.

Станция охлаждения газа необходима для охлаждения природного газа в летний сезон. Качество подготовки газа напрямую влияет на надежность магистральных трубопроводов и безопасность эксплуатации оборудования.

Одним из ключевых узлов холодильного цикла – система конденсации пропана. От эффективности конденсации зависит стабильность работы холодильной машины, величина холодопроизводительности, а также общий коэффициент энергоэффективности установки. На действующих СОГ нередко наблюдаются проблемы, связанные с снижением эффективности теплообмена, ручным регулированием частоты вращения электродвигателя вентиляторов на конденсаторе хладагента (КХ). Это приводит к увеличению эксплуатационных затрат, снижению эффективности работы системы подготовки газа, необходимости частого технического обслуживания оператором. При ручном управлении оператору установки необходимо плавно производить переключение частоты вращения, что повышает риски неоптимального управления и появления отказов оборудования в виду человеческого фактора.

Таким образом, используемый технологический цикл конденсации пропана может не обеспечить эффективности работы и надежности всего оборудования, что требует проведения работ по его модернизации и проектирования замкнутой автоматической системы управления частотой вращения вентиляторов теплообменника.

Улучшение работы КХ позволит обеспечить стабильную работу холодильного цикла, повысить эффективность теплообмена.

Целью данного этапа исследования является проектирование замкнутой системы автоматического регулирования частоты вращения рабочего колеса вентиляторов теплообменника на СОГ-3.

Транспортировка газа представляет собой сложный многоэтапный процесс. После аппаратов воздушного охлаждения из компрессорного цеха транспортируемый газ поступает по газопроводам в установку теплообменных испарителей для окончательного охлаждения. Подача природного газа производится в трубное пространство аппаратов, а жидкий хладагент поступает в их межтрубное пространство. Охлажденный до необходимой температуры газ, отдав тепло кипящему хладагенту, выходит из испарителей и через компрессорный цех направляется далее на магистраль (Рис.1).

Газообразный хладагент после установок испарителей поступает в цех компримирования хладагента, где сжимается до рабочего давления СОГ. Процесс компримирования осуществляется с помощью турбохолодильных агрегатов.

После сжатия в компрессорных агрегатах производится охлаждение и конденсация хладагента в аппаратах воздушного охлаждения (конденсаторах). Каждый аппарат состоит из теплообменных секций, которые соединены параллельно, а также вентиляторов с диффузорами. Далее жидкий хладагент из конденсаторов сливается в линейные ресиверы, которые обеспечивают десятиминутный запас жидкого хладагента в системе [2].

Из ресиверов (РЛ) жидкий хладагент поступает в верхнюю часть трубного

пучка теплообменников-испарителей (Т-1). Спускаясь по трубкам, пропан-бутановая смесь дополнительно переохлаждается кипящим в нижней части установки хладагентом. Охлаждение природного газа в испарителях осуществляется в основном за счет скрытой теплоты испарения кипящего хладагента. Далее, через регулирующие (дросселирующие) клапаны поступает в межтрубное пространство. Получая тепло от природного газа, проходящего по трубному пучку, хладагент кипит. Пары кипящей жидкости после испарителей проходят через отделители жидкости (ОЖС) и поступают на всасывание компрессоров (ХК-1), в которых замыкается холодильный цикл [3]. Таким образом эффективность охлаждения природного газа зависит от температуры хладогента, а следовательно, от частоты вращения соответствующих лопастей вентиляторов конденсатора (АВО-1).

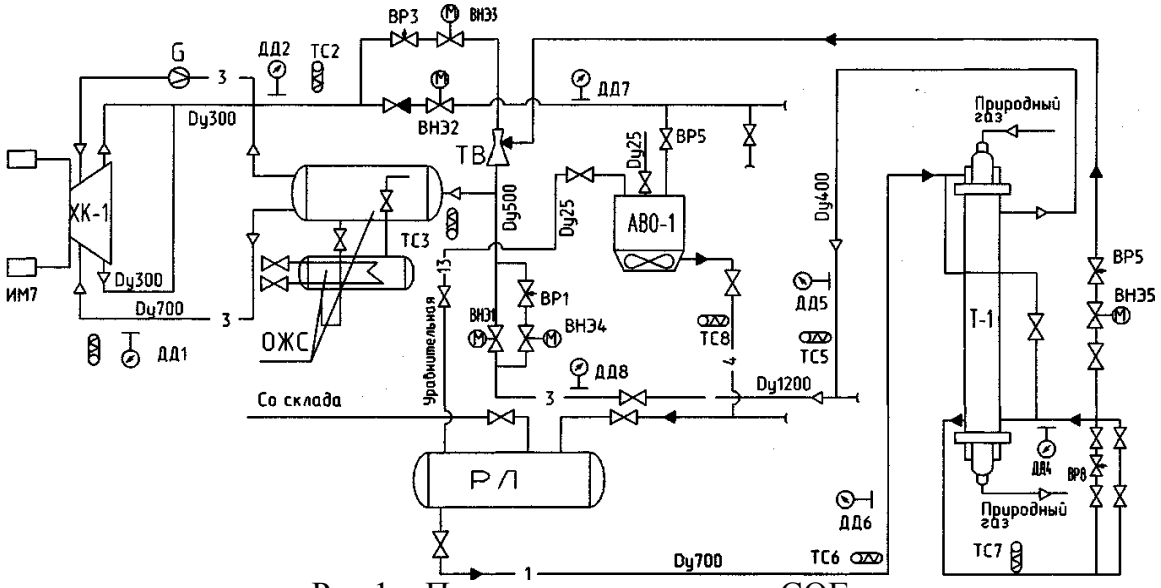


Рис.1 – Принципиальная схема СОГ

На Рис.2 представлена функциональная схема автоматического управления охлаждением пропана, в которой управляющее воздействие на объект (вентиляторы) формируется на основе сравнения фактического значения температуры природного газа на выходе из испарителя с её заданным значением.

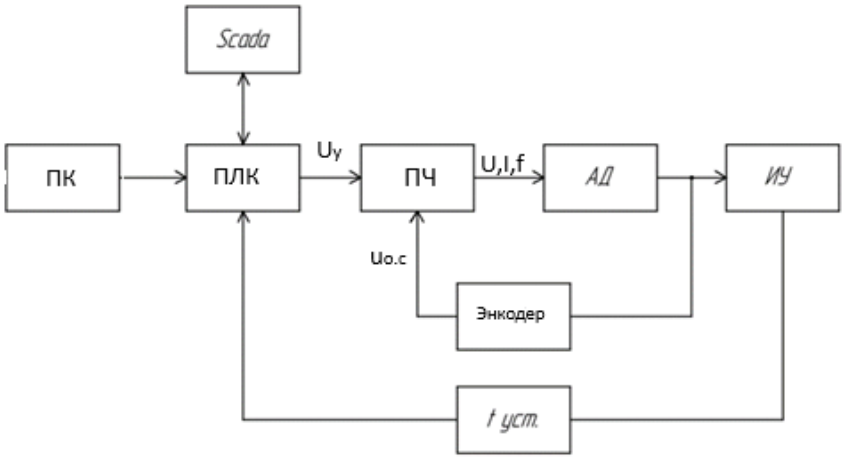


Рис.2 – Функциональная схема системы охлаждения пропана

Данная замкнутая система автоматического регулирования частоты вращения состоит из задающего устройства ПЛК – программируемого логического контролера, ПЧ –преобразователь частоты, асинхронного двигателя (АД), исполнительного устройства (ИУ) - вращающееся лопасти вентилятора, датчика обратной связи угловых перемещений (энкодера), датчика температуры на выходе ($T_{уст.}$).

Описание работы системы.

Оператор удаленно с помощью SCADA-системы задает требуемое значение температуры хладагента, ПЛК в котором реализован П-регулятор, формируется сигнал управления частотным преобразователем, а следовательно, и частотой вращения лопасти вентилятора, в зависимости от значения величины рассогласования температуры газа заданной и текущей ($T_{уст}$). Структурная схема автоматического регулирования температуры газа изображена на Рис.3.

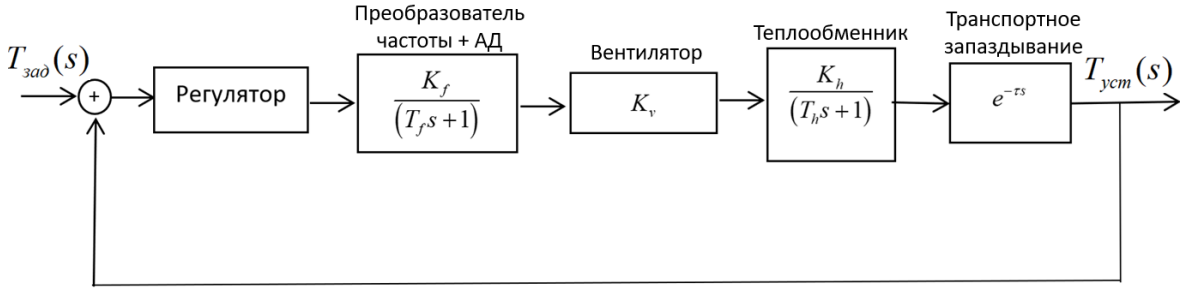


Рис.3 – Структурная схема автоматического регулирования температуры газа

Для реализации логических функций управления, а также регулирования частоты вращения вентилятора был выбран ПЛК Siemens S7-1500. Данный ПЛК обладает достаточной вычислительной мощностью для реализации сложных алгоритмов. Коммуникация S7-1500 может производиться с помощью протоколов: Profinet, ModBus, Ethernet/IP, что обеспечивает беспрепятственный обмен данными с частотными преобразователями и верхнеуровневой системой [6].

На установке используется электродвигатель ВАСО4-37-24, который является асинхронной взрывозащищённой электромашиной обеспечивает необходимые характеристики двигателя: мощность электродвигателя 37 кВт; частота вращения 250 об/мин.; имеет возможность работы в режимах регулирования частоты вращения в составе частотно регулируемых электроприводов [7].

В качестве устройства регулирования частоты электродвигателя ВАСО4-37-24 выбран преобразователь частоты Inovance MD290. Для управления преобразователем частоты ВАСО4-37-24 с помощью ПЛК Siemens S7-1500 предложено использовать протокол Profinet, который позволяет объединить оборудование различных производителей в единый технологический процесс, реализовать быстрый и надежный обмен данными, и с помощью ПО TIA Portal конфигурировать, настраивать и диагностировать как ПЛК, так и преобразователь частоты.

Для реализации управления преобразователем частоты Inovance MD290 по протоколу Profinet необходимо установить карту Profinet MD500-PN1 [8].

В программном обеспечении «TIA Portal» был создан проект, в котором сконфигурировано связь по протоколу Profinet для реализации управления ПЛК S7-1500 преобразователем частоты Inovance, этапы создания которого описаны ниже.

В TIA Portal создается проект. Из библиотеки «Hadware» добавляется устройство PLC S7-1500 из перечня устройств. Данному устройству

присваивается сетевой адрес 192.168.250.1 (Рис.4).

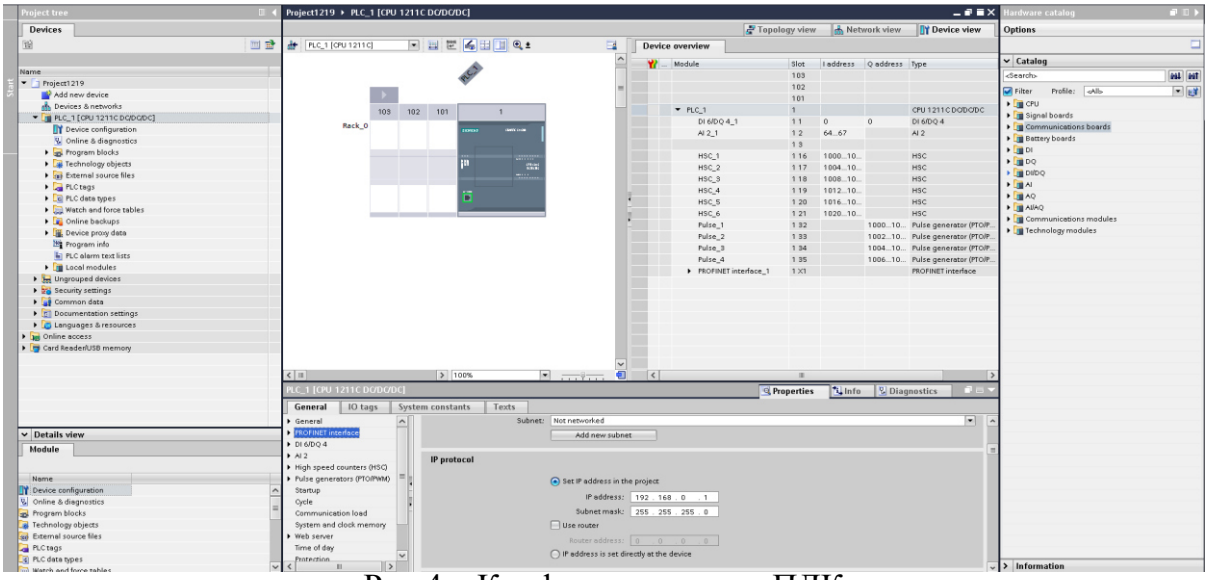


Рис.4 – Конфигурирование ПЛК

Далее создается блок данных DB200 и описываются тип данных всех переменных, используемых в проекте (Рис.5).

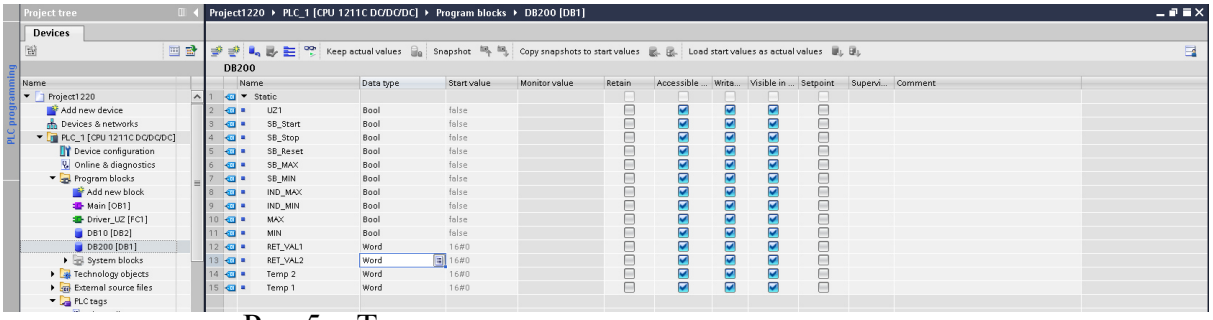


Рис.5 – Типы данных используемых переменных

Блок данных D10 необходим для диагностики устройств подключенных по Profinet и для отслеживания связи с данным протоколом.

Программа управления преобразователем частоты реализована в созданной функции «FC» под именем «Driver_UZ» (Рис.6).

В основной части программы вызываем написанную функцию «Driver_UZ» и блок диагностики сети Profinet (Рис.7).

В результате TIA Portal создан проект позволяющий ПЛК S7-1500 управлять частотным преобразователем Inovance MD290 через опциональный модуль Profinet MD500-PN1, что подтверждает возможность реализации такого управления с помощью выбранного оборудования.

С использованием [9,10] и для реализации управления температурой природного газа на выходе из испарителя (Рис.1), согласно структурной схеме (Рис.3) составлена передаточная функция:

$$G(s) = \frac{K}{\left(T_f s + 1\right)\left(T_h s + 1\right)} e^{-\tau s}, \qquad (1)$$

где, T_f – постоянная времени привода вентилятора, T_h – инерция

теплообменника; τ – транспортное запаздывание газа; $K = K_p K_f K_v K_h$; K_p – усиление регулятора; K_f – коэффициент привода вентилятора; K_v – коэффициент вентилятора; K_h – коэффициент теплообмена.

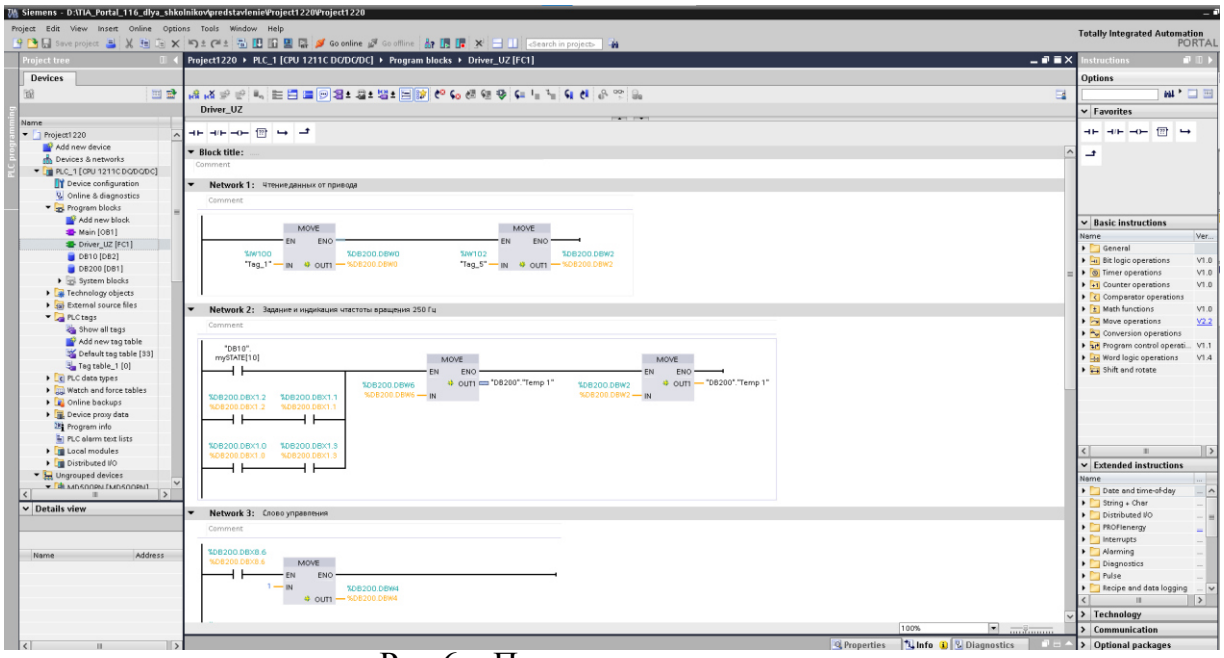


Рис.6 – Программа управления

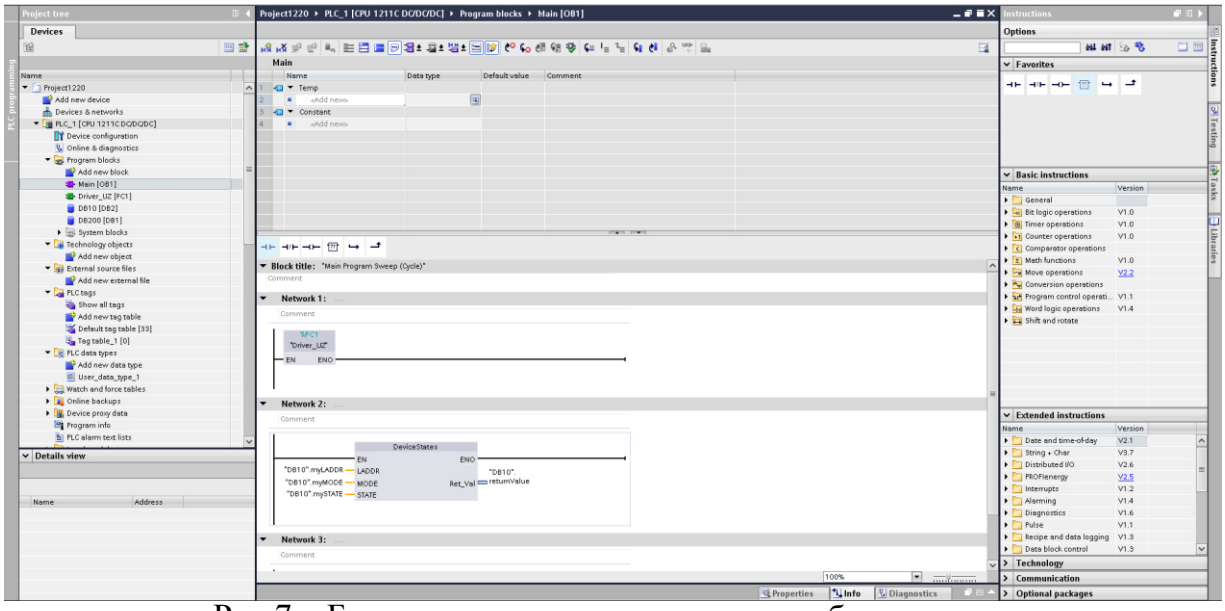


Рис.7 – Блок управления частотного преобразователя

На Рис.8 представлен график переходного процесса при: $K_p = 0,5$, $T_f = 2c$, $T_h = 15c$, $\tau = 5c$.

По Рис.8 можно определить, что время переходного процесса – примерно 2 минуты, что является допустимым. В начале видна задержка (инерция теплообменника), далее температура плавно выходит на заданное значение с небольшим статическим отклонением. Данный предварительный расчет с

примерными параметрами системы показал возможность использования предложенного варианта регулирования температуры природного газа.

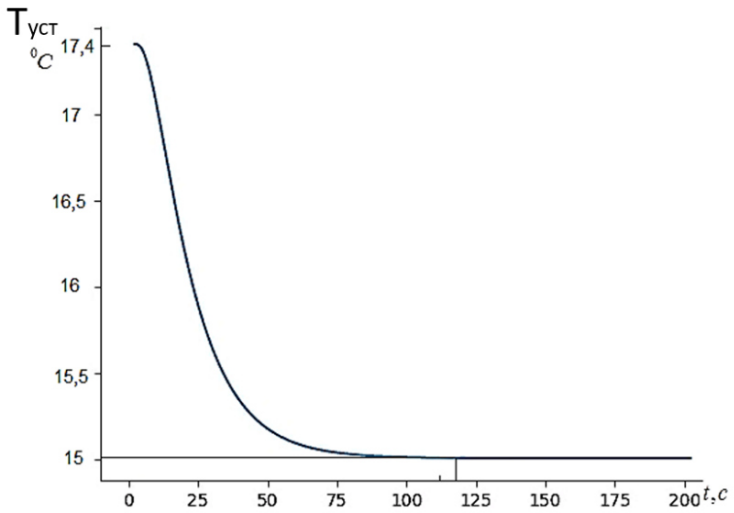


Рис. 8 – Переходный процесс замкнутой системы

Заключение.

В ходе исследования изучен процесс охлаждения газа (СОГ-3) Ямбургского ЛПУМГ. Анализ существующей системы выявил ключевой недостаток – ручное регулирование частоты вращения вентиляторов конденсатора, при котором, из-за человеческого фактора, иногда возникали неоптимальные режимы работы станции, которые влияли на ресурс работы используемого оборудования и тем самым снижая надежность системы в целом.

В качестве решения предложена модернизация технологического процесса конденсации хладагента на основе внедрения замкнутой системы автоматического регулирования частоты вращения лопастей вентиляторов конденсатора. Подобрано необходимое оборудование и проверена возможность реализации автоматического управления частотой вращения вентилятора СОГ. В дальнейших исследованиях, с целью снижения коэффициента запаздывания, предполагается использование в качестве обратной связи не только температуру выходящего из испарителя природного газа, но и дополнительно температуру и давление хладагента перед испарителем.

Библиографический список.

1. Брехунцов А.М. Состояние и анализ развития ресурсной базы углеводородного сырья Ямало-Ненецкого автономного округа и шельфа Карского моря. / А.М. Брехунцов, И.И. Нестеров, Е.Г. Грамматчикова // Георесурсы. – 2023. – № 25(1). – С. 15-23.
2. Акбашева А.А. Оптимизация системы охлаждения газа на компрессорных станциях в зоне многолетнемерзлых грунтов / А.А. Акбашева, Р.А. Шестаков // Наукоемкие решения в газовой отрасли. – 2024. – № 3(147). – С. 44-52.
3. Рачевский Б.С. Сжиженные углеводородные газы/ А.А Акбашева. – М. : Изд-во «НЕФТЬ и ГАЗ», 2009. – 640 с.
4. Жмудь В.А. Теория автоматического управления. Замкнутые системы / В.А. Жмудь. – М. : Издательство Юрайт. – 2025. – 229 с.
5. Бутученков И.А. Преобразователь частоты в системах вентиляции / И.А. Бутученков // Молодой ученый. – 2023. – № 43(490). – С. 12-15.
6. Техническая документация. Программируемые контроллеры S7-1500 –

Текст: электронный – URL: https://www.siemens-pro.ru/docs/simatic/s7-1500/04_S7_1500_2015_ru.pdf (дата обращения 19.01.2026).
7. Двигатели взрывозащищенные вертикальные серии ВАСО – Текст электронный // ООО «Электротяжмаш-Привод»: официальный сайт. – URL: https://privod-lysva.ru/index.php?id=1376 (дата обращения 21.01.2026).
8. Серия MD290 Привод переменного тока: руководство по эксплуатации – Текст: электронный// ООО "Альпарк: официальный сайт. – URL: https://euroec.by/assets/files/inovance/md290_manual_rus.pdf (дата обращения 21.01.2026).
9. Глазырин Г.В. Теория автоматического регулирования: учеб. пособие / Г.В. Глазырин. – 2-е изд., испр. – Новосибирск : Изд-во НГТУ. – 2017. – 168 с.
10. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – СПб. : Изд-во Профессия, 2003. – 752 с.

[1]Майстришин Михаил Михайлович, канд. техн. наук, доцент, mmmaystrishin@sevsu.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

[2]Теленко Аркадий Валериевич, студент, arik250504@mail.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

Maystrishin Mikhail Mikhaylovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, mmmaystrishin@sevsu.ru, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

Telenko Arkady Valerievich, Student, arik250504@mail.ru, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

УДК 629.4.051.2

РАЗРАБОТКА АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ЛЕБЁДКИ ДЛЯ ПОГРУЖНЫХ ОКЕАНОЛОГИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

Никишин В.В.[1], Багаев А.В.[2], Подруцкий В.С.[3]

DEVELOPMENT OF AN AUTOMATED WINCH FOR SUBMERSIBLE OCEANOLOGICAL INSTRUMENTS

Nikishin V.V.[1], Bagaev A.V[2]., Podrutcky V.S.[3]

Аннотация. *Представлены результаты разработки системы управления автоматизированной лебёдкой для вертикального перемещения океанологического измерительного оборудования. Назначение комбинированной системы – получение вертикальных профилей распределения параметров воды в море или озере. Система управления состоит из драйвера электродвигателя, программного обеспечения для управляющего микроконтроллера и счетчика оборотов на основе сенсора Холла.*

Abstract*. The results of the development of a control system for an automated winch for the vertical movement of oceanological measuring equipment are presented. The purpose of such a combined system is to obtain vertical profiles of the distribution of water parameters in the sea or lake. The control system consists of an electric motor driver, software for the control microcontroller, and a revolution counter based on a Hall sensor.*

Ключевые слова. *Система управления, мониторинг, микроконтроллер, окружающая среда.*

Keywords. *Control system, monitoring, microcontroller, environment.*

Введение.

Одной из актуальных научных задач в океанологии является мониторинг и анализ вертикальных профилей океанологических параметров. В отличие от использования дистанционных (например, гидроакустических [1]) методов исследования океана, вертикальные профили чаще всего получают путём контролируемого погружения измерительных приборов на заданную глубину с помощью судовых лебёдок или вручную с борта маломерных судов. В первом случае речь идет о масштабных экспедициях на научных судах (например «Профессор Водяницкий», «Академик Иоффе» [2,3]), во втором случае измерения часто проводят в прибрежных районах, где батиметрия не позволяет работать крупным судам с большой осадкой.

В статье предлагается решение по сборке из недорогих компонентов модульной системы в виде автоматизированной лебёдки и блока управления для интеграции в беспилотные надводные аппараты (БНА). Беспилотные аппараты имеют ряд достоинств, которые наиболее эффективно проявляются в работе в прибрежных районах, где работа с маломерных судов может быть затруднена или невозможна из-за мелководья [4]. Опыт авторов в создании и эксплуатации БНА, а также анализ публикаций по этой тематике показывает, что в настоящее время разработка БНА – это не просто «модный» тренд, а насущная

необходимость, так как получаемый эффект качественно поднимает уровень получаемой информации о процессах, происходящих в океане [5-7].

Коллективом авторов данной статьи разработано несколько БНА, которые применялись для получения полей распределения температуры, солености, растворенного кислорода на поверхности, а также для получения карт глубин. В настоящей работе речь идет о совершенствовании БНА на базе стандартной надувной лодки Инзер-250 при установке на него лебёдки – Рис.1.

Рис.1 – Стандартная надувная лодка, переоборудованная в БНА на испытаниях в акватории пгт. Кацивели

Цель исследования – разработка аппаратной и программной части модуля управления для оборудования беспилотного надводного аппарата с лебёдкой, способной обеспечить контролируемое погружение и подъем океанологических приборов на глубинах от 5 до 50 м.

Аппаратное обеспечение.

Основой является ручная лебедка ЗУБР «Профессионал» 43115-0.9 грузоподъемностью 900 кг [8]. Для привода лебедки демонтирована рукоятка со стопором, разработано крепление для установки электродвигателя и муфта сочленения с приводным валом лебедки. Электродвигатель постоянного тока с червячным редуктором взят от стеклоподъемника автомобиля. – Рис.2

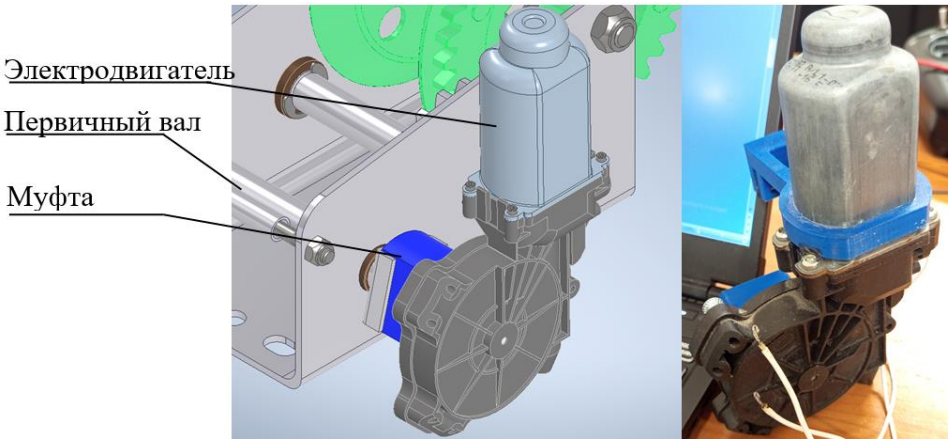


Рис.2 – Общий вид электродвигателя с редуктором

В качестве драйвера двигателя использован Н-мост, поддерживающий управление широтно-импульсной модуляцией (ШИМ).

Для счетчика оборотов выбран сенсор Холла. На первичный вал лебёдки устанавливается крепление с двумя постоянными магнитами противоположной полярности на расстоянии устойчивого реагирования сенсора Холла на их магнитное поле – Рис.3. Управляющим микроконтроллером (МК) выбран Atmega328p как

простой в программировании, малогабаритный и недорогой вариант.

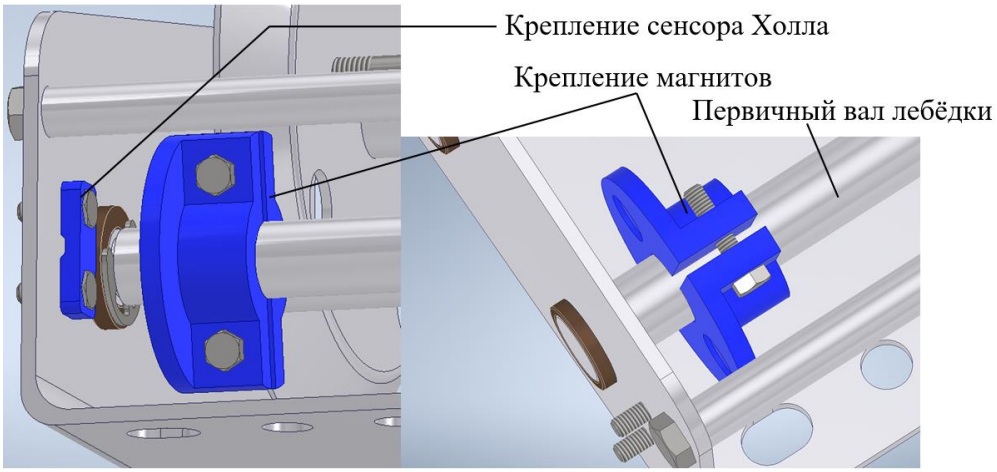


Рис.3 – Крепление сенсора Холла и магнитов

Электропитание драйвера и электромотора лебёдки осуществляется от аккумулятора напряжением 12 В, а питание МК через понижающий DC-DC преобразователь. Электрическая принципиальная схема показана на Рис.4.

Управление лебедкой осуществляется через беспроводной радиомодуль LoRa [9] на частоте 433 МГц по протоколу UART.

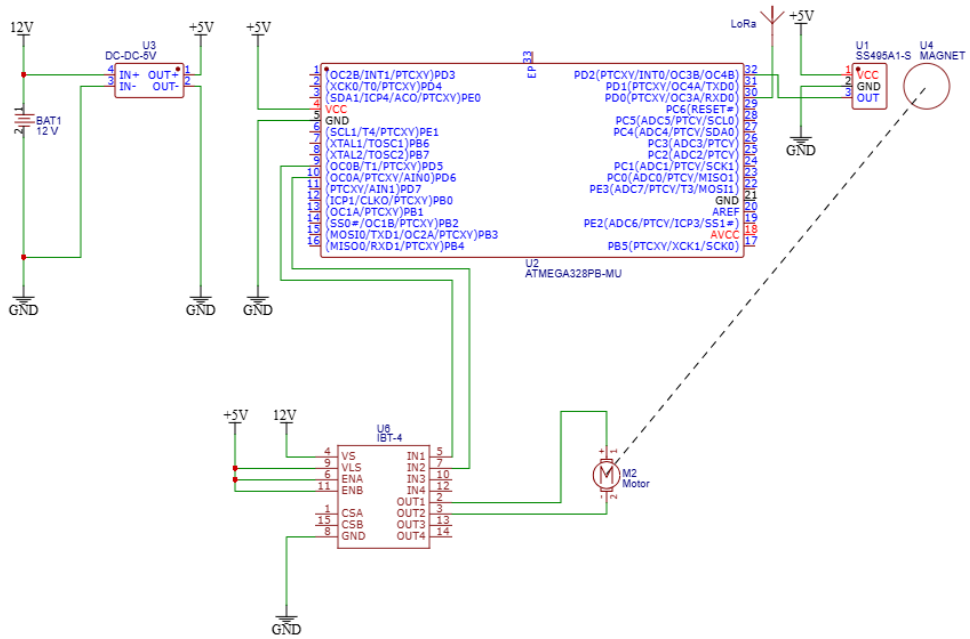


Рис.4 – Электрическая принципиальная схема

Программное обеспечение.

Программное обеспечение выполняет три основных функции:

1) получение информационной посылки, содержащей команду для погружения или подъёма;

2) измерение количества полных оборотов первичного вала лебёдки по внешнему прерыванию от сенсора Холла;

3) формирование сигнала направления вращения и генерацию ШИМ сигнала для плавного старта и останова лебедки;

4) отправка информации о текущем положения груза лебедки по

беспроводному каналу на берег оператору БНА.

Команда на погружение или подъем передается в бинарном виде от оператора на берегу к БНА по радиоканалу, приемник на борту БНА подключается к МК по интерфейсу RS-232. Информационная посылка имеет следующий вид:

[$][byte0][E][\r][\n],

где $ – стартовый байт для идентификации начала посылки; [byte0] –байт команды погружения или подъёма; E – символ окончания посылки; [\r][\n] – перенос строки.

Приём посылки осуществляется с применением прерывания UART по приему. Текущий полученный байт сравнивается со стартовым байтом «$» до тех пор, пока не будет получено начало посылки, далее происходит отсчет 5 символов для завершения приема всей посылки, когда оба условия выполнены, это означает, что вся посылка помещена в массив data_in, код обработчика прерываний по приёму UART представлен ниже:

```
ISR(USART0_RX_vect)
{
     uint8_t rx = UDR0;//текущий принятый байт
     if (index == 0 && rx != '$') return;
     data_in[index++] = rx;
     if (index == 5)
     {
          index = 0;
          if (data_in[3] != 'E')
          {

               return;
          }
          else
          {
               UCSR0B &= ~(1 << RXCIE0);//отключениепрерываний
               UART0_RX_flag = true;//посылкаполучена
          }
     }
}//endofISR
```

Измерение оборотов лебёдки производится с помощью внешних прерываний микроконтроллера. Магниты разной полярности, проходя вблизи сенсора Холла вызывают изменение его выходного сигнала, согласно графику переходной характеристики [10]. Исходя из Рис.5 видно, что сигнал изменяется от уровня логического нуля (0,5 В) до уровня логической единицы (4,5 В).

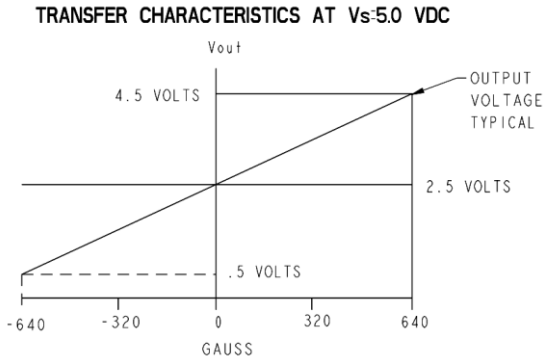


Рис.5 – Зависимость выходного сигнала сенсора Холла SS495A от величины магнитного поля

Так как магниты расположены на первичном валу лебедки, то проходя вблизи сенсора Холла, они вызывают изменение сигнала, вызывающее внешнее прерывание по фронту или спаду на контакте PD2 (INT0) МК.

Осциллограмма выходного сигнала сенсора Холла за полный оборот вала представлена на Рис.6.

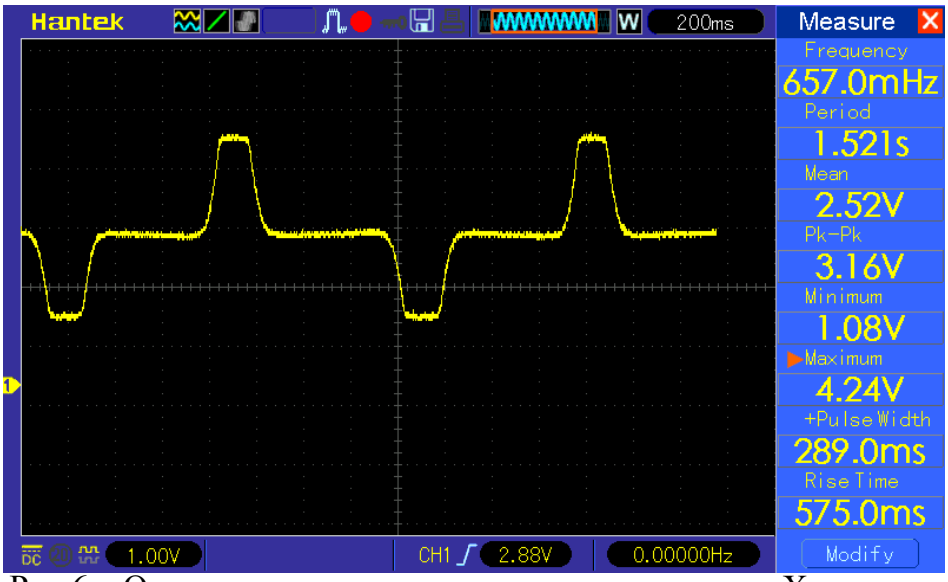


Рис.6 – Осциллограмма выходного сигнала сенсора Холла при вращении вала лебедки

На осциллограмме видны два пика уровня напряжения, соответствующие разным полярностям магнитов.

Код настройки внешнего прерывания на контакте INT0:

```
EICRA |= 1<<ISC01;//прерывание на спад
EIMSK |= 1<<INT0;//включение прерывания INT0.
```

В обработчике внешнего прерывания учитывается текущая команда подъёма или спуска: если текущая команда «подъём», то переменная R, содержащая количество оборотов уменьшается и наоборот. Таким образом, нет необходимости устанавливать энкодер для определения направления вращения вала лебедки.

Код обработчика внешних прерываний:

```
ISR (INT0_vect)
{
     if (direction)
     {
          R++;//увеличение оборота на 1
     }
     else
     {
          R--;//уменьшение оборота на 1
     }
}
```

Управление вращением двигателя осуществляется аппаратным ШИМ-генератором на базе 8-битного таймера/счётчика МК. Таймер генерирует два независимых ШИМ-сигнала, один сигнал используется для подъёма, второй для погружения. На принципиальной схеме показано подключение каналов

аппаратного ШИМ OC0A и OC0B к управляющим контактам IN1 и IN2 драйвера двигателя.

Если подается сигнал высокого уровня на управляющий контакт IN1, то электродвигатель вращается так, что груз лебёдки погружается, и наоборот, если сигнал высокого уровня есть на IN2, то груз поднимается. Для предотвращения одновременного включения двух каналов в прошивке реализована проверка в виде условия:

```
if (direction)
{
     OCRA = 0;//ШИМ для погружения отключён
     OCRB = power;//ШИМ на подъём включен
}
else
{
     OCRB = 0;//ШИМ для подъёма отключён
     OCRA = power;//ШИМ на погружение включен
}
```

Заключение.

Благодаря разработанной системе управления работой лебедки существенно расширится диапазон решаемых задач прибрежных исследований, таких как получение вертикальных профилей распределения параметров (температура, солёность, прозрачность и другие), что в настоящее время реализуется фактически в ручном режиме путем сброса троса с приборами в воду. Автоматизация лебедки повышает качество получаемых измерений благодаря контролю скорости погружения и подъема приборов.

Дальнейшим развитием области применения разработанной системы является её интеграция в беспилотные надводные аппараты, что ещё более расширит возможности проведения экспедиций в прибрежных районах.

Работа Багаева А.В. выполнена в рамках темы государственного задания ФГБУН ФИЦ МГИ FNNN-2024-0016 «Прибрежные исследования».

Библиографический список.

1. Багаев А.В. Гранулометрические характеристики донных наносов сублиторальной области Южного берега Крыма в районе Лименской бухты / А.В. Багаев, К.И. Гуров, С.А. Нуриев // Морской гидрофизический журнал. – 2025. – Т. 41. – № 2(242). – С. 213-228.
2. Чубаренко И.П. Формирование весеннего термоклина в прибрежной зоне Юго-Восточной Балтики по экспедиционным данным 2010-2013 гг / И.П. Чубаренко, Н.Ю. Демченко, Е.Е. Есюкова [и др.] // Океанология. – 2017. – Т. 57. – № 5. – С. 702-709.
3. Иванов В.А. Статистические характеристики глубинных течений в Черном море по данным инструментальных измерений / В.А. Иванов, Т.В. Пластун, Н.В. Маркова [и др.] // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. – 2019. – Т. 12. – № 4. – С. 49-58.
4. Никишин В.В. Интеграция цифровых измерительных датчиков в беспилотные надводные аппараты для мониторинговых работ в прибрежных районах / В.В. Никишин, А.В. Багаев // Океанологические исследования. – 2023. – Т. 51. – № 2. – С. 93-108.
5. Wurl O. HALOBATES: An Autonomous Surface Vehicle for High-Resolution Mapping of the Sea Surface Microlayer and Near-Surface Layer on Essential Climate Variables / O. Wurl, L.Gassen, T. H. Badewien [et al.] // Journal of Atmospheric and Oceanic Technology. – 2024. – Vol. 41. – Iss. 12. – P.

1197-1211. – URL: https://journals.ametsoc.org/view/journals/atot/41/12/JTECH-D-24-0021.1.xml (дата обращения 18.12.2025).
6. Gassen L. Temperature and salinity anomalies in the sea surface microlayer of the South Pacific during precipitation events / L. Badewien, T.H. Ewald, J. Ribas-Ribas [et al.] // Journal of Geophysical Research: Oceans. – Vol. 128. – Iss. 6. – URL: https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/2023JC019638 (дата обращения 18.12.2025).
7. Koutantou K. Validation of NASA Sea Surface Temperature Satellite Products Using Saildrone Data / K. Koutantou, P. Brunner, J. Vazquez-Cuervo // Remote Sensing. – 2023. – Vol. 15 (9):2277. – URL: https://www.mdpi.com/2072-4292/15/9/2277 (дата обращения 18.12.2025).
8. https://www.vseinstrumenti.ru : сайт магазина с информацией о характеристиках лебедки URL: https://www.vseinstrumenti.ru/product/professional-ruchnaya-barabannaya-lentochnaya-lebedka-zubr-0-9-t-10-m-43115-0-999322/?ysclid=mhuhraxscy864841500&utm_referrer=https://yandex.ru (дата обращения 18.12.2025). – Режим доступа: свободный.
9. https://www.ebyte.com : сайт производителя беспроводных модулей передачи информации. URL:https://www.ebyte.com/product/1988.html (дата обращения 18.12.2025). – Режим доступа: свободный.
10. https://honeyvell.energy : сайт производителя сенсоров Холла. URL: https://honeyvell.energy/wa-data/public/site/electronics/Документация%20Honeywell%20SS496A1-T2.pdf?ysclid=mljafu1pvk981994274 (дата обращения 18.12.2025). – Режим доступа: свободный.

[1]Никишин Владимир Владимирович, канд. техн. наук, доц., доцент, nikishin_v@mail.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

[2]Багаев Андрей Владимирович, канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, a.bagaev1984@gmail.com, Россия, Севастополь, ФГБУН ФИЦ «Морской гидрофизический институт РАН»

[3]Подруцкий Владислав Сергеевич, магистрант, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

Nikishin Vladimir Vladimirovich, Candidate of Technical Sciences, Docent, Associate Professor, nikishin_v@mail.ru, Russian Federation, Sevastopol, Sevastopol State University

Bagaev Andrei Vladimirovich, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Leading Researcher, a.bagaev1984@gmail.com, Russian Federation, Sevastopol, FSBSI FRC «Marine Hydrophysical Institute»

Podrutcky Vladislav Sergeevich, Master Student, Russian Federation, Sevastopol, Sevastopol State University

УДК 004.942:517.97:51-74

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УГЛОВОГО ПЕРЕНОСНОГО УСКОРЕНИЯ В ЭКВИВАЛЕНТНОЕ ПО ЭНЕРГОЕМКОСТИ РЕЛЕЙНОЕ

Бохонский А.И.[1], Варминская Н.И.[2]

CONVERSION OF OPTIMAL ANGULAR TRANSLATIONAL ACCELERATION TO RELAY EQUIVALENT

Bohonsky A.I.[1], Varminskya N.I.[2]

Аннотация. *Выявлена возможность преобразования заранее известного реверсионно конструируемого управления, снижающего энергетическое принуждение для достижения цели движения, в эквивалентное релейное управление (переносное ускорение). Приведен пример реализации алгоритма реверсионного конструирования переносного ускорения (управления) и получения эквивалентного по энергоемкости релейного управления движением, при котором достигается состояние покоя в конечном положении. Результаты исследования подтверждают возможность практической реализации данного типа управления.*

Abstract. *The possibility of converting a previously known reversibly designed control, which reduces energy coercion to achieve the motion purpose, into equivalent relay control (translational acceleration) is revealed. An example of the algorithm implementation for reversive design of translational acceleration (control) and obtaining equivalent in energy intensity relay control, at which quiescence state in the final position is achieved, is given. The results of the study confirm the possibility of practical implementation of this type of control.*

Ключевые слова. *Реверсионное конструирование, энергоемкость, минимальное энергетическое принуждение, аналитический и численный анализ, релейное оптимальное управление.*

Keywords. *Reverse engineering, energy intensity, minimum energy coercion, analytical and numerical analysis, relay optimal control.*

Предисловие.

Реверсионное конструирование оптимальных управлений начиналось с поиска оптимальных переносных ускорений объектов без предварительного привлечения критерия оптимальности.

Как известно, в задаче Ж. Лагранжа с критерием оптимальности $\int_0^T U^2 dt$, краевыми условиями $\left(S(0)=0,\ \dot{S}(0)=0;\ S(T)=L,\ \dot{S}(T)=0\right)$,

предполагающими движение из исходного в конечное состояние покоя (T – время движения, L – перемещение), и управления движением $\frac{d^2S}{dt^2} = U(t)$, решение найдено вариационным методом теории оптимального управления. Здесь под управлением понимается ускорение переносного движения. Однако, эта задача позволяет получить решение и наиболее простым путем – непосредственно подчиняя функции перемещения *S(t)* и скорости $\dot{S}(t)$ переносного движения заданным краевым условиям.

Введение.

Созданию и эффективному использованию классической теории оптимального управления движением объектов посвящены работы [1-13] и другие.

В задачах оптимизации, основанных непосредственно на критерии снижения энергетических затрат для достижения цели движения, нет должной уверенности в том, что найдена предельно возможная минимальная энергия для достижения поставленной цели движения. Конечно, в частных случаях движения не исключается выявление наименьшего значения такой энергии.

В работах [13-19] была показана тенденция снижения энергетических затрат (минимального энергетического принуждения) при возрастании степени полинома переносного ускорения (управления) и установлено возможное предельное значение энергии.

Для перехода к практической реализации ускорения (управления) данного типа необходимы дополнительные преобразования ранее используемых функций. Экспериментальная проверка эффективности сложных аналитических функций возможна, например, с привлечением эквивалентных по энергоемкости других типов управлений (переносных ускорений).

Конструирование управления (переносного ускорения).

Для поступательного движения объекта принят полином:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{4} C_i t^{i-1}, \qquad V(t) = \frac{dS(t)}{dt} = \sum_{i=2}^{4} C_i t^{i-2}, \qquad U(t) = \frac{dV(t)}{dt} = \sum_{i=3}^{4} C_i t^{i-3},$$

где C_i (i = 1,…,4) – константы. После подчинения полинома только краевым условиям $\left(S(0) = 0,\ V(0) = 0;\ S(T) = L,\ V(T) = 0\right)$, решения системы линейных алгебраических уравнений для определения констант получены известные классические функции (задача Лагранжа):

$$S(t) = \frac{Lt^2(3T - t)}{T^3}, \qquad V(t) = \frac{6Lt(T - t)}{T^3}, \qquad U(t) = \frac{6L}{T^2}\left(\frac{T - 2t}{T}\right).$$

В этом случае степень полинома ускорения n = 1. При m = 1 кг, L = 1 м, T = 1 с затрачиваемая на движение энергия равна:

$$A_1 = 2\int_0^{T/2} mU(t)V(t)dt = 2,25 \text{ Дж}.$$

Графики функций *S(t), V(t), U(t)* изображены на Рис.1. При увеличении степени полинома

$$S(t) = \sum_{i=1}^{6} C_i t^{i-1}$$

с учетом дополнительных условий $\left(U(T/2)=0,\ \dot{U}(T/2)=0\right)$ выражения для перемещения, скорости и переносного ускорения (управления) принимают вид (Рис.2):

$$S(t)=\frac{Lt^2(5T^3-10T^2t+10Tt^2-4t^3)}{T^5},\qquad V(t)=\frac{dS(t)}{dt},\qquad U(t)=\frac{10L}{T^2}\left(\frac{T-2t}{T}\right)^3.$$

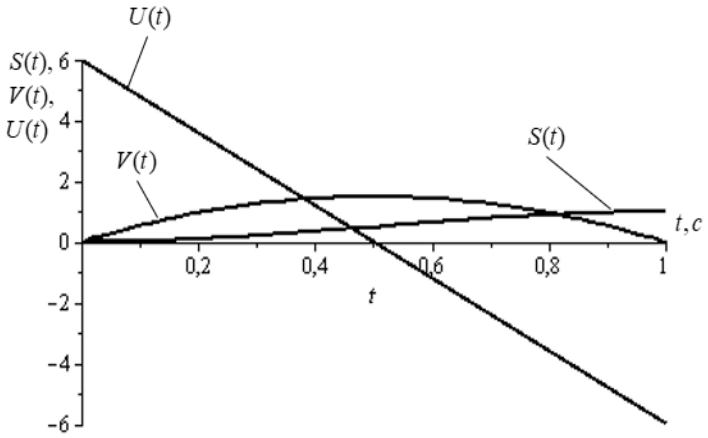


Рис.1 – Перемещение, скорость и ускорение (управление) при оптимальном поступательном движении (случай $n = 1$)

В этом случае степень полинома ускорения $n = 3$ и энергия, затрачиваемая на движение:

$$A_3=2\int_0^{T/2} mU(t)V(t)dt=1{,}5625\ \text{Дж}.$$

Следует обратить внимание на тенденцию реверсионного конструирования – при возрастании степени полинома (всегда нечетной), стремлении $n\to\infty$ энергия асимптотически будет стремится к предельному минимальному значению $\left(\underset{n\to\infty}{A_n}\to 1\ \text{Дж}\right)$.

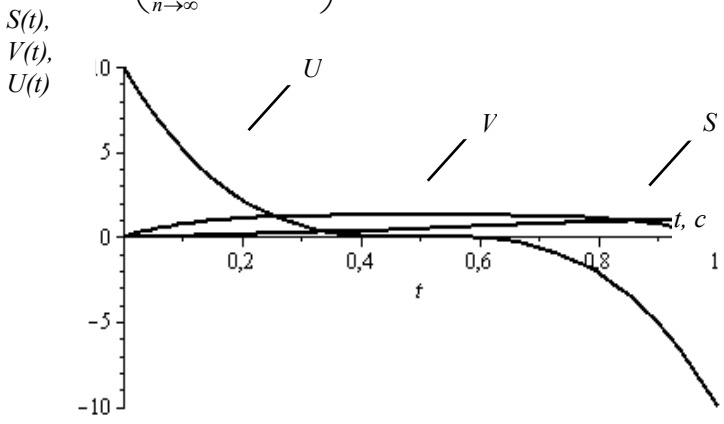


Рис.2 – Графики *S(t), V(t), U(t)* при оптимальном поступательном движении (случай $n = 3$)

Изменение вида управления с целью облегчения практической реализации может несколько повысить энергоемкость такого управления.

Конструирование оптимального переносного движения при существенном возрастании степени полинома.

Перемещение задано полиномом вида:

$$S(t)=\sum_{i=1}^{18}C_i t^{i-1},$$

где C_i (i = 1,…,18) – константы. Скорость и ускорение соответственно

$$V(t)=\frac{dS(t)}{dt},\qquad U(t)=\frac{dV(t)}{dt}.$$

Константы найдены с учетом ранее заданных краевых условий

$$S(0)=0,\ V(0)=0,\ U(0)=0;\ S(T)=L,\ V(T)=0,\ U(T)=0$$

и дополнительных условий, отражающих минимальное энергетическое принуждение для достижения цели движения (нового состояния покоя)

$$U(T/2)=0,\quad \frac{dU}{dt}(T/2)=0,...,\frac{d^8U}{dt^8}(T/2)=0,$$

а также необходимых условий минимума, выявленного ранее реверсионно критерия оптимальности $\left(J=\int_0^T\left[\frac{dU(t)}{dt}\right]^2dt=\min\right)$, т.е.

$$\frac{\partial J}{\partial C_{16}}=0,\quad \frac{\partial J}{\partial C_{17}}=0,\quad \frac{\partial J}{\partial C_{18}}=0.$$

Функции *S(t), V(t), U(t)* громоздки и поэтому тут не представлены, их графики изображены на Рис.3.

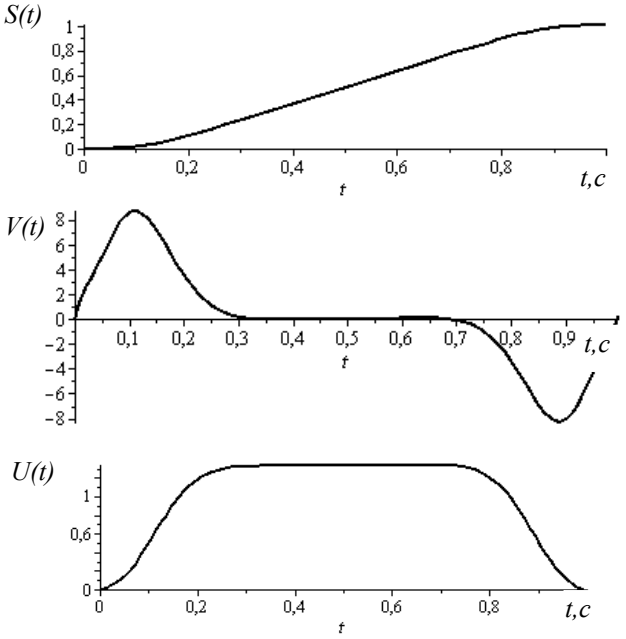


Рис.3 – Графики *S(t), V(t), U(t)* при оптимальном поступательном движении (случай n = 3)

Отметим, что при $m = 1$ кг, $L = 1$ м, $T = 1$ с энергия $A_{18} = 2\int_0^{T/2} mU(t)V(t)dt = 1,77$ Дж. В данном примере энергия меньше на 21,4% по сравнению с классическим управлением ($A_1 = 2,25$ Дж). И для данного типа управления с ростом степени полинома затраченная на реализацию движения энергия уменьшается, стремясь к своему предельному минимальному значению.

Обоснование возможности практической реализации телескопическим манипулятором углового переносного ускорения с использованием релейного управления, эквивалентного по энергоемкости найденному реверсионно.

По аналогии с поступательным движением (для $n = 3$) аналитические зависимости для угла поворота, угловой скорости и углового ускорения принимают вид (Рис.4):

$$\varphi_3(t) = \frac{\varphi_*}{8}\left(\left(\frac{T-2t}{T}\right)^5 + 10\frac{t}{T} - 1\right),\ \omega_3(t) = \frac{5\varphi_*}{4T}\left(1 - \left(\frac{T-2t}{T}\right)^4\right),\ \varepsilon_3(t) = \frac{10\varphi_*}{T^2}\left(\frac{T-2t}{T}\right)^3, \quad (1)$$

где φ_* – заданный угол поворота звена (в горизонтальной плоскости).

С использованием аналитических зависимостей (1) записана энергия, затраченная на движение (поворот) из исходного в конечное состояние покоя (на участке разгона):

$$A_3 = \int_0^{T/2} J\varepsilon_3(t)\omega_3(t)dt = \frac{0,78125\varphi_*^2 J}{T^2}, \quad (2)$$

где J – физический момент инерции вращающегося в горизонтальной плоскости звена (консольного стержня).

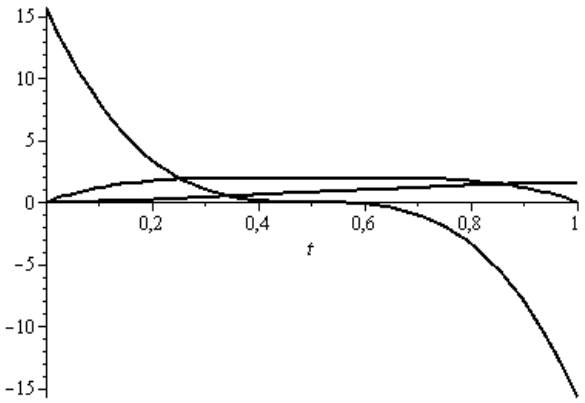


Рис.4 – Графики $\varphi_3(t)$, $\omega_3(t)$, $\varepsilon_3(t)$ при реверсионном угловом ускорении ($n = 3$)

Релейное управление как переносное ускорение типа разгон-торможение при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси представимо функцией Хевисайда:

$$\varepsilon_r(t) = \frac{4\varphi_e^*}{T^2}\left[H(T) - 2H(t - T/2) + H(t - T)\right],$$

где φ_e^* – заданный максимальный угол поворота. Угловая скорость и угол поворота, как и прежде, $\omega_r(t)=\dfrac{d\varphi_r(t)}{dt}$, $\varepsilon_r(t)=\dfrac{d\omega_r(t)}{dt}$; выражения громоздки и поэтому здесь опускаются; графики представлены на Рис.5. Как и ранее, энергия вычисляется по зависимости (2).

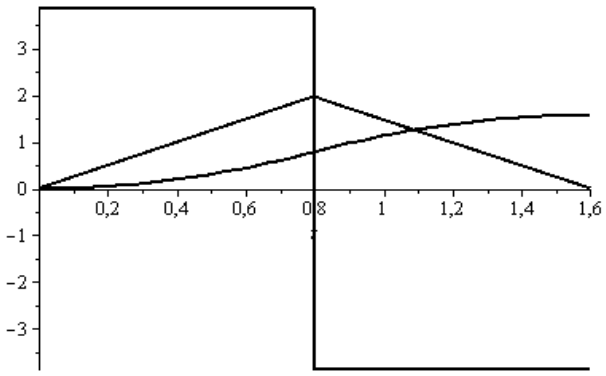


Рис.5 – Графики $\varphi_r(t)$, $\omega_r(t)$, $\varepsilon_r(t)$ при эквивалентном релейном управлении

При вычислении энергии релейного управления возможны упрощения. Для нулевых начальных условий ($\varphi_r(0)=0,\ \omega_r(0)=0$) на участке разгона угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение соответственно:

$$\varphi_r(t)=\frac{\varepsilon_0 t^2}{2},\quad \omega_r(t)=\varepsilon_0 t,\quad \varepsilon_r(t)=\varepsilon_0. \tag{3}$$

С учетом условия при $t = T_1/2$, $\varphi_r(T_1/2)=\varphi_e^*/2$ и выражения (3) получим: $\varepsilon_0=\dfrac{4\varphi_e^*}{T_1^2}$. Энергия на реализацию движения $A_r=2\int\limits_0^{T/2} J\varepsilon_r(t)\omega_r(t)dt=\dfrac{2J(\varphi_e^*)^2}{T_1^2}$, где J – физический момент инерции.

Из условия равенства энергий реверсионного и релейного управления следует алгебраическое уравнение:

$$\frac{2J\left(\varphi_e^*\right)^2}{T_1^2}-\frac{0,78125\left(\varphi_3^*\right)^2 J}{T^2}=0,$$

из которого найдено время действия эквивалентного релейного управления: $T_1 = 1,6T$, где T – время действия реверсионного управления.

Пример. Исходные данные: $\varphi_e^* = \pi/2$, $T = 1$ с, $J = 1$ кг·м^2. В обоих случаях энергия $A_3 = A_r = 3,8533$ Дж. Для $\varphi_1^* = \pi/2$ значение релейного переносного ускорения $\varepsilon_0=\dfrac{4\varphi_e^*}{T_1^2}=3,85$ с$^{-2}$.

Заключение.

Существующее математическое обеспечение современных мехатронных систем позволяет программировать управление для реализации линейных и угловых ускорений (оптимальных управлений) с минимальным энергетическим принуждением для достижения цели движения.

Используемые, например, в манипуляторах оптимальные управления не исключают их адаптацию – для практической реализации менее энергоемких переносных поступательных и вращательных движений звеньев исполнительных органов.

Библиографический список.

1. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, Б.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 384 с.
2. Воронов А.А. Теория автоматического управления: теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / А.А. Воронов. – М. : Высш. шк., 1977. – 288 с.
3. Абдуллаев Н.Д. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов / Н.Д. Абдуллаев, Ю.П. Петров. – Л. : Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1985. – 240 с.
4. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю.П. Петров. – Л. : Энергия. Ленингр. отд-ние, 1977. – 280 с.
5. Черноусько Ф.Л. Управление колебаниями / Ф.Л. Черноусько, П.Д. Акуленко, Б.Н. Соколов. – М. : Наука,1980. – 384 с.
6. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели / П.Д. Крутько. – М. : Наука, 1988. – 326 с.
7. Красовский Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М. : Наука, 1968. – 476 с.
8. Маркеев А.П. О принципе наименьшего принуждения / А.П. Маркеев // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – № 1. – С. 113-121.
9. Сейдж Э.П. Оптимальное управление системами / Э.П. Сейдж, Ч.С. Уайт. – М. : Радио и связь, 1982. – 392 с.
10. Nevistic V. Model predictive control: breaking through constraints / V. Nevistic, J.A. Primbs // Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, 13 December 1996. – Piscataway, NJ, USA : IEEE Operations Center, 2002. – DOI: 10.1109/CDC.1996.577295.
11. Dymkov M. Optimal control and optimization for a class of repetitive processes / M. Dymkov, E. Rogers, K. Galkowski [et al.] // 2007 International Workshop on Multidimensional Systems, Aveiro, Portugal, 27-29 June 2007. – Piscataway, NJ, USA : IEEE Operations Center, 2008. – DOI: 10.1109/NDS.2007.4509544.
12. Yuan Y. Active disturbance rejection control for a pneumatic motion platform subject to actuator saturation: an extended state observer approach / Y. Yuan, W. Zidong, Y. Yang [et al.] // Automatica. – 2019. – № 107. – P. 353-361. – DOI: doi.org/10.1016/j.automatica.2019.05.056.
13. Kostin G. Optimal Control of Longitudinal Motions for an Elastic Rod with Distributed Forces / G. Kostin, A. Gavrikov // Optimization and Control. Cornell University. – 2022. – P. 1-11. – DOI: doi.org/10.48550/arXiv. 2206.06139.
14. Бохонский А.И. Актуальные задачи вариационного исчисления / А.И. Бохонский. – Glivice : Palmarium Academic Publishing, 2013. – 77 с.
15. Бохонский А.И. Реверсионный принцип оптимальности / А.И. Бохонский. – М. : Вузовский учебник, 2016. – 173 с.
16. Бохонский А.И. Конструирование оптимальных управлений перемещением упругих объектов / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская. – СПб. : НИЦ МС, 2020. – 120 с.
17. Бохонский А.И. Оценка энергоемкости минимального принуждения целенаправленного движения объекта / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, А.И. Рыжков // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и

технологии. – 2022. – № 1(351). – С. 15-20. – DOI: 10.33979/2073-7408-2022-351-1-15-20.
18. Бохонский А.И. Механика управляемого движения объектов / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, Т.В. Мозолевская. – М. : ИНФРА-М, 2022. – 170 с.
19. Бохонский А.И. Оптимальное переносное движение объектов конечной жесткости / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, А.И. Рыжков. – СПб : Медиапапир, 2024. – 154 с.

[1]Бохонский Александр Иванович, д-р техн. наук, проф., профессор, bohon.alex@mail.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

[2]Варминская Наталья Ивановна, канд. техн. наук, доц., заведующий кафедрой, nvarminska@gmail.com, Россия, Севастополь, Черноморское высшее военно-морское училище имени П.С. Нахимова

Bokhonsky Alexander Ivanovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor, bohon.alex@mail.ru, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

Varminskaya Natalia Ivanovna, Candidate of Technical Sciences, Docent, Head of the Department, nvarminska@gmail.com, Russia, Sevastopol, Black Sea Higher Naval School named after P.S. Nakhimov

УДК 621.71

СЕЛЕКТИВНАЯ СБОРКА УЗЛА ШАТУННО-ПОРШНЕВОЙ ГРУППЫ ДВИГАТЕЛЕЙ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

Филипович О.В.[1], Вандышев Д.А.[2], Тиунова А.В.[3], Камцев В.А.[4]

SELECTIVE ASSEMBLY OF THE CONNECTING ROD AND PISTON GROUP UNIT OF INTERNAL COMBUSTION ENGINES

Filipovich O.V.[1], Vandyshev D.A.[2], Tiunova A.V.[3], Kamtsev V.A.[4]

Аннотация. *Рассматриваются варианты конструкций узла шатунно-поршневой группы двигателя внутреннего сгорания. Для достижения требуемой точности его сопряжений используют селективные методы сборки. Построена базовая математическая модель, позволяющая при заданных допущениях определять вероятности образования сборочных комплектов. Для принятых исходных данных приведен пример определения данного показателя сборочного процесса. Обозначены перспективы дальнейших исследований.*

Abstract. *This article examines design options for the connecting rod and piston assembly of an internal combustion engine. Selective assembly methods are used to achieve the required mating accuracy. A basic mathematical model has been developed that, under given assumptions, allows for determining the probabilities of assembly set formation. An example of determining this assembly process indicator for the adopted initial data is provided. Prospects for further research are outlined.*

Ключевые слова. *Селективная сборка, узел шатунно-поршневой группы, математическая модель, вероятности образования сборочных комплектов.*

Keywords. *Selective assembly, connecting rod and piston group unit, mathematical model, probabilities of formation of assembly sets.*

Введение. Основным механизмом поршневого двигателя внутреннего сгорания является кривошипно-шатунный механизм, предназначенный для преобразования возвратно-поступательного движения поршня во вращательное движение коленчатого вала [1,2]. Он состоит из нескольких узлов, один из которых – узел, соединяющий шатунную группу с поршневой (Рис.1) [3]. Его конструкция зависит от типа сопряжения поршневого пальца 1 с бобышками поршня 2 и верхней головки шатуна 3. По указанному признаку различают поршневые пальцы [4]:

1) закрепленные в бобышках поршня и вращающиеся в головке шатуна;
2) закрепленные в головке шатуна и вращающиеся в бобышках поршня;
3) свободно вращающиеся как в головке шатуна, так и в бобышках поршня (плавающие пальцы).

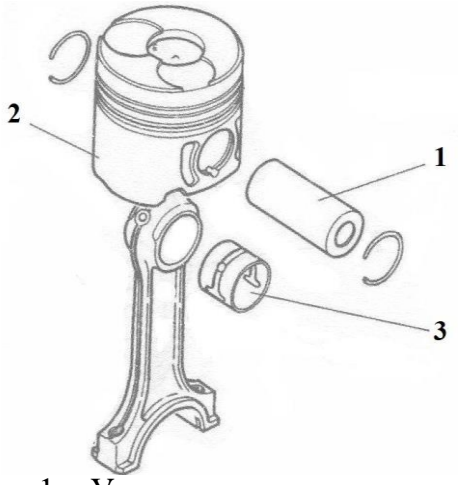


Рис.1 – Узел шатунно-поршневой группы

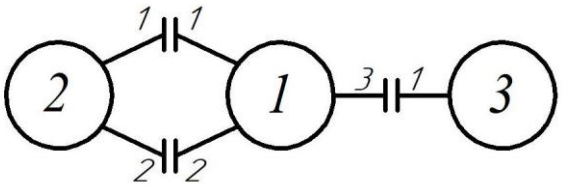


Рис.2 – Схема сопряжения

Схема сборки такого узла показана на Рис.2, где кружочками обозначены собираемые детали, линиями – параметры, по которым происходит сопряжение. Палец условно имеет три параметра (x_{11}, x_{12}, x_{13}) – это диаметры наружного цилиндрического элемента в трех плоскостях. Аналогичным образом пронумерованы диаметры отверстий в двух бобышках поршня (x_{21}, x_{22}). Параметром втулки головки шатуна является ее внутренний диаметр x_3.

Надежная работа узла шатунно-поршневой группы может быть обеспечена при выполнении требований как к конструкции и материалам, так и к точности соединений, для достижения которой используют селективную сборку [4]. **Целью работы** является построение базовой модели процесса селективной сборки рассматриваемого узла, позволяющей при определенных допущениях определять вероятность образования общего количества сборочных комплектов (СК).

Математическая модель. Выходные параметры изделия связаны со входными линейными зависимостями:

$$y_{11} = |x_{21} - x_{11}|,\ y_2 = |x_3 - x_{13}|,\ y_{12} = |x_{22} - x_{12}|, \qquad (1)$$

которые при допущениях о равенстве диаметров двух отверстий в поршне $(x_2 = x_{21} = x_{22})$ и постоянстве наружного диаметра пальца по всей его длине $(x_1 = x_{11} = x_{12} = x_{13})$ можно записать следующим образом:

$$y_1 = g_1(x_1, x_2) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2, \qquad (2)$$

$$y_2 = g_2(x_1, x_3) = \xi_4 x_1 + \xi_3 x_3, \qquad (3)$$

где $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$, $\xi_1 = \pm 1,\ \xi_2 = -\xi_1,\ \xi_3 = \pm 1, \xi_4 = -\xi_3$. Выбор знаков постоянных коэффициентов $\xi_1,\ \xi_3$ зависит от типа сопряжения пальца с другими деталями. Допущения обусловлены особенностями технологии изготовления деталей без учета отклонений формы и расположения посадочных поверхностей. Таким образом, имеем два выходных параметра узла, требования к качеству которых определяются системами неравенств:

$$y_{j\min} \le y_j \le y_{j\max}, \qquad (4)$$

где $y_{j\min}, y_{j\max}$ – соответственно наименьшие и наибольшие значения

параметров y_j, $j=\overline{1,2}$. При использовании селективной сборки с полной групповой взаимозаменяемостью допуски выходных параметров

$$Ty_j = y_{j\max} - y_{j\min}$$

можно выразить через групповые допуски $Tx_i^{(k_i)}$ $(i=\overline{1,3})$ следующим образом [5…7]:

$$Ty_1 = Tx_1^{(k_1)} + Tx_2^{(k_2)};\ Ty_2 = Tx_1^{(k_1)} + Tx_3^{(k_3)}. \quad (5)$$

При известных Ty_j величины групповых допусков можно рассчитать, применяя способ одинаковой относительной точности $\alpha_{c\,j}$ параметров x_i:

$$\alpha_{c\,j} \le \frac{Ty_j}{\sum_i |\xi_i| x_{in}},\ Tx_i^{(k_i)} = \alpha_c x_{in}, \quad (6)$$

где x_{in} – номинальные значения параметров x_i $(i=\overline{1,3})$. Следует учитывать, что

1) в знаменателе (6) сумма берется по значениям параметров деталей, образующих попарные сопряжения

$$\alpha_{c\,1} \le \frac{Ty_1}{x_{1n} + x_{2n}},\ \alpha_{c\,2} \le \frac{Ty_2}{x_{1n} + x_{3n}}; \quad (7)$$

2) при расчетах групповые допуски $Tx_1^{(k_1)}$ детали типа «палец» должны приниматься одинаковыми.

Последнее условие легко достигается при равенстве расширенных допусков на изготовление всех деталей, т.е. при

$$Tx_1 = Tx_2 = Tx_3. \quad (8)$$

С учетом (2) и (3) определяются соотношения, связывающие верхние (Es) и нижние (Ei) предельные отклонения размеров:

1) при $\xi_1 = 1,\ \xi_2 = -1$

$$Esy_1 = Esx_1 - Eix_2;\ Eiy_1 = Eix_1 - Esx_2; \quad (9)$$

2) при $\xi_1 = -1,\ \xi_2 = 1$

$$Esy_1 = Esx_2 - Eix_1;\ Eiy_1 = Eix_2 - Esx_1; \quad (10)$$

3) при $\xi_3 = 1,\ \xi_4 = -1$

$$Esy_2 = Esx_3 - Eix_1;\ Eiy_2 = Eix_3 - Esx_1; \quad (11)$$

4) при $\xi_3 = -1,\ \xi_4 = 1$

$$Esy_2 = Esx_1 - Eix_3;\ Eiy_2 = Eix_1 - Esx_3. \quad (12)$$

Формулы (9)…(12) используются для расчета границ селективных групп.

Функциональную связь типа сборочного комплекта k ($k=\overline{1,L}$) с номерами селективных групп k_i устанавливают обобщенные правила комплектования вида [5]

$$k=k(k_1,k_2,k_3),\ k_i=\overline{2,l_i-1},\ i=\overline{1,3}, \tag{13}$$

где l_i – количество селективных групп деталей i-го типа. При многовариантном комплектовании в СК k-го типа направляется $\lambda_{ik_i}^{(k)}$-я часть деталей, находящихся в группе k_i. Вероятность образования комплектов k-го типа:

$$I_{CK}^{(k)}=\min_{i=\overline{1,3}}\left\{\sum_{k_i=2}^{l_i-1}I_i^{(k_i)}\lambda_{ik_i}^{(k)}\right\},\ k=\overline{1,L}, \tag{14}$$

где $I_i^{(k_i)}=\int\limits_{a_i^{(k_i)}}^{a_i^{(k_i+1)}}f_{1i}(x_i)dx_i$, $a_i^{(k_i)}$ – границы селективных групп; $f_{1i}(x_i)$ – плотности распределений параметров (размеров) деталей i-го типа. Общее число СК всех типов:

$$I_{CK}=\sum_{k=1}^{L}I_{CK}^{(k)}. \tag{15}$$

В случае одновариантного комплектования, которое чаще всего применяется для формирования рассматриваемого узла при выполнении условия (8), число типов СК равно количеству селективных групп годных $L=(l_1-2)=(l_2-2)=(l_3-2)$. В этом случае формулы (13) и (14) имеют вид:

$$k_2-k_1=0,\ k_3-k_1=0; \tag{16}$$

$$I_{CK}^{(k)}=\min\left\{I_1^{(k_1)},I_2^{(k_2)},I_3^{(k_3)}\right\},\ k=\overline{1,L}. \tag{17}$$

Пример моделирования. Рассматривается сборка узла с плавающим пальцем. Схема расположения интервалов допусков параметров x_i и предельные значения зазоров S в соединениях показаны на Рис.3 [8]. Для данной схемы при равенстве расширенных допусков и количестве селективных групп правило комплектования является одновариантным, поэтому уравнения комплектования в номерах селективных групп при обеспечении групповой взаимозаменяемости имеют вид (16), а $I_{CK}^{(k)}$ определяются по формуле (17). Предположим, что законы распределения размеров сопрягаемых деталей *i*-го типа – гауссовские, математические ожидания случайных величин совпадают с координатами середин соответствующих интервалов допусков.

Примем, что отношения Tx_i/σ_i (σ_i – среднеквадратическое отклонение случайных величин x_i, $i=\overline{1,3}$) для деталей типа «палец» и «втулка» равны 6, а у детали типа «поршень» они могут изменяться в пределах (5…6). График зависимости вероятности образования сборочных комплектов от Tx_2/σ_2 показан на Рис.4.

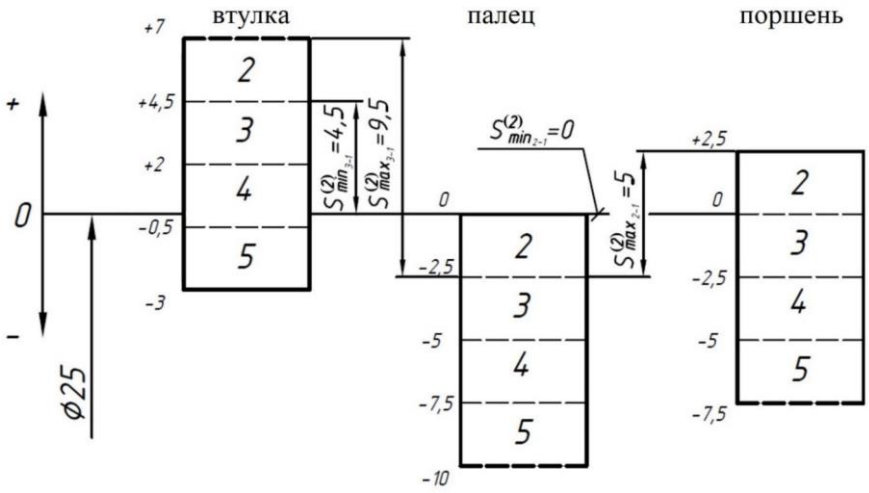


Рис.3 – Схема расположения интервалов допусков параметров x_i [8]

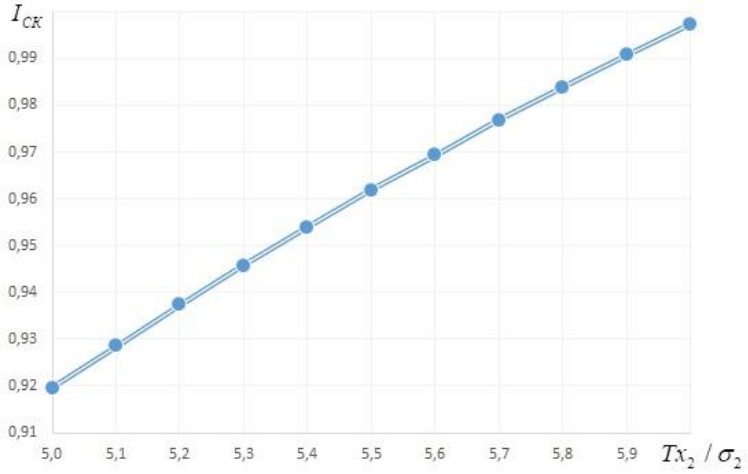


Рис.4 – График зависимости I_{CK} от Tx_2 / σ_2

Заключение. Показанные на Рис.4 данные свидетельствуют о существенной зависимости рассматриваемого показателя селективной сборки от разницы отношений Tx_i / σ_i деталей и косвенно подтверждают правильность построенной модели. Следует отметить, что на результаты также будут оказывать влияние математические ожидания случайных величин, точнее их расположение относительно соответствующих координат середин интервалов допусков.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на модернизацию построенной математической модели путем учета случайных факторов, связанных с

– ограниченной точностью измерений, проводимых для сортировки на размерные группы [9,10];

– влиянием отклонений формы на качество собираемых изделий.

Библиографический список.

1. Богданов С.Н. Автомобильные двигатели: Учебник для автотранспортных техникумов / С.Н. Богданов, М.М. Буренков, И.Е. Иванов. – М.: Машиностроение, 1987. – 368 с.
2. Ковалевский В.И. Автомобильные двигатели. Основы теории : учебное

пособие / В.И. Ковалевский, С.В. Ковалевский. – М. : Вологда: Инфра-Инженерия, 2025. – 244 с.
3. Двигатели ГАЗ-560, ГАЗ-5601, ГАЗ-5602: Руководство по эксплуатации, техническому обслуживанию и ремонту и каталог деталей. – М. : ООО «ИДТР», 2013. – 96 с.
4. Ховах М.С. Автомобильные двигатели / М.С. Ховах, Г.С. Маслов. – Изд. 2-е, пер. и доп. – М. : «Машиностроение», 1971. – 456 с.
5. Катковник В.Я. Основы теории селективной сборки / В.Я. Катковник, А.И. Савченко. – Л. : Политехника, 1991. – 303 с.
6. Бонч-Осмоловский М.А. Селективная сборка / М.А. Бонч-Осмоловский. – М. : Машиностроение, 1974. – 144с.
7. Буловский П.И. Автоматизация селективной сборки приборов / П.И. Буловский, Г.В. Крылов, В.А. Лопухин. – Л. : Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1978. – 232 с.
8. Filipovich O.V. Simulation model of selective assembly of the conrod-piston group unit of internal combustion engines, taking into account measurement errors during sorting / O.V. Filipovich, A.I. Balakin, N.A. Balakina [et al.] // Journal of Physics Conference Series. – 2021. – P. 012188. – DOI: 10.1088/1742-6596/2096/1/012188.
9. Филипович О.В. Влияние погрешностей измерения на показатели однопараметрической многовариантной селективной сборки двух элементов / О.В. Филипович // Современные технологии сборки: Материалы VIII Международного научно-технического семинара, Москва, 19-20 октября 2023 года. – М. : Московский Политех, 2023. – С. 149-154. – EDN VTMUTS.
10. Филипович О.В. Методы моделирования процессов однопараметрической многоэлементной селективной сборки / О.В. Филипович // Автоматизация и измерения в машино- приборостроении. – 2025. – № 2(30). – С. 44-50. – EDN OISYXS.

[1]Филипович Олег Викторович, канд. техн. наук, доц., доцент, ophisl@yandex.ru, Россия, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

[2]Вандышев Денис Анатольевич, аспирант, denisvandyshev@gmail.com, Россия, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

[3]Тиунова Анастасия Владимировна, аспирант, tiunowan4s@yandex.ru, Россия, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

[4]Камцев Вячеслав Андреевич, ассистент, kva_m98@mail.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

Filipovich Oleg Viktorovich, Candidate of Technical Sciences, Docent, Associate Professor, ophisl@yandex.ru, Russia, Sevastopol State University

Vandyshev Denis Anatolyevich, Postgraduate Student, denisvandyshev@gmail.com, Russia, Sevastopol State University

Tiunova Anastasiya Vladimirovna, Postgraduate Student, tiunowan4s@yandex.ru, Russia, Sevastopol State University

Kamtsev Vyacheslav Andreevich, Assistant, kva_m98@mail.ru, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 519.21

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕНАДЕЖНОЙ ВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ МНОГОКОМПОНЕТНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОТЕРЯМИ

Песчанский А.И.[1]

STATIONARY CHARACTERISTICS OF AN UNRELIABLE RECOVERABLE MULTI-COMPONENT MAINTENANCE SYSTEM WITH LOSSES

Peschansky A.I.[1]

Аннотация. *Исследуется неоднородная многокомпонентная система обслуживания с потерями и ненадежными восстанавливаемыми приборами. Поступающий в систему поток заявок простейший. Времена обслуживания на приборах, наработки приборов до отказа и времена их восстановлений имеют распределения общего вида. На основании построенной полумарковской модели функционирования системы находятся ее стационарные характеристики: финальные вероятности и средние времена пребывания в состояниях.*

Abstract. *A heterogeneous multi-component queuing system with losses and unreliable, recoverable devices is studied. The incoming flow of requests into the system is simple. The service times on the devices, the mean time between failures, and the recovery times have general distributions. Based on the constructed semi-Markov model of the system's operation, its stationary characteristics are determined.*

Ключевые слова*. Многокомпонентная систем обслуживания, наработка прибора до отказа, полумарковская модель, стационарные показатели системы.*

Keywords. *Multi-component queuing system, device mean time between failures, semi-Markov model, stationary system parameters.*

Введение.

Исследование математических моделей систем массового обслуживания с ненадежными приборами обусловлено необходимостью адекватного описания реальных практических систем. Одними из первых результатов в этом направлении были [1,2]. В дальнейшем ненадежные системы обслуживания исследовались многими авторами, обзор полученных результатов можно найти,

например, в [3-6]. Следует отметить, что точные результаты для расчета характеристик ненадежных СМО получены, как правило, для экспоненциальных систем. В данной работе находятся точные значения стационарных характеристик ненадежной восстанавливаемой неоднородной многокомпонентной системы обслуживания, в предположении, что входящий поток заявок является простейшим, а все остальные ее определяющие стохастические параметры имеют общий вид. Отказы приборов происходят в зависимости от суммарной наработки приборов после восстановлений. Полученные результаты являются продолжением исследований, начатых в [7].

Постановка задачи.

В неоднородную N-компонентную систему обслуживания поступает простейший поток заявок, время β между моментами поступления заявок имеет функцию распределения $G(t)=1-e^{-\lambda t}$, $t>0$. Длительность α_k обслуживания заявки k-м прибором имеет функцию распределения общего вида $F_k(t)=P\{\alpha_k \le t\}$ с плотностью $f_k(t)$ и конечным математическим ожиданием $M\alpha_k$, $k=\overline{1,N}$. Отказы приборов происходят только во время обслуживания заявок, обнаруживаются мгновенно и сразу начинается их восстановление. При этом заявки на приборах теряются. Под наработкой прибора до отказа понимается суммарное время, затраченное прибором на обслуживание заявок без учета времени пребывания прибора в состоянии ожидания. Отсчет наработки до отказа начинается с момента начала эксплуатации прибора или с момента начала обслуживания первой заявки после его восстановления. Наработка k-го прибора до отказа реализуется как случайная величина γ_k с функцией распределения $\Phi_k(t)$, плотностью $\phi_k(t)$ и конечным математическим ожиданием $E\gamma_k, k=\overline{1,N}$. Длительность аварийного восстановления σ_k имеет функцию распределения $\Psi_k(t)$, плотность $\psi_k(t)$ и конечное математическим ожидание $E\sigma_k, k=\overline{1,N}$. Предполагается, что случайные величины α_k, β и γ_k удовлетворяют условиям $0<P\{\alpha_k<\beta\}<1$ и $0<P\{\alpha_k<\gamma_k\}<1$. Заявки, поступающие в систему в момент, когда все обслуживающие приборы заняты, теряются.

Цель статьи – обобщить математическую модель функционирования многокомпонентной системы обслуживания с потерями и учетом отказов приборов в зависимости от суммарной наработки приборов после восстановлений и найти ее стационарные характеристики.

Построение полумарковской модели функционирования системы.

Для построения математической модели используем аппарат полумарковских процессов с дискретно-непрерывным множеством состояний [8,9]. Полумарковский процесс $S(t)$ определим с помощью процесса марковского восстановления $\{S_n,\Theta_n; n\ge 0\}$, где $\{S_n; n\ge 0\}$ – вложенная цепь Маркова, Θ_n – времена пребывания полумарковского процесса в состояниях.

Введем следующее фазовое пространство состояний $E=\{i\mathbf{dxu},\ i=\overline{1,N}\}$. Компоненты N-мерного вектора $\mathbf{d}=(d_1,...,d_N)$ указывают на физическое состояние соответствующего прибора. Если $d_k=0$, $k=\overline{1,N}$, то k-й прибор в работоспособном состоянии ожидает заявку; если $d_k=1$ – обслуживает заявку, $d_k=2$ – восстанавливается после отказа; i – номер прибора, который изменил свое физическое состояние последним. В момент изменения физического

состояния i-го прибора ненулевые координаты вектора $\mathbf{x}=(x_1,...,x_N)$ для соответствующих приборов указывают на оставшиеся времена до ближайших изменений их физических состояний. Ненулевые компоненты вектора $\mathbf{u}=(u_1,...,u_N)$ – суть оставшиеся наработки до отказа соответствующих приборов в этот момент.

Таким образом, если i- й прибор начал обслуживать первую заявку с начала эксплуатации или после восстановления, то $d_i=1,\ x_i=u_i=0$; в момент начала обслуживания последующих заявок $d_i=1,\ x_i=0,\ u_i>0$ (u_i – оставшаяся наработка i-го прибора до отказа). В случае отказа прибора – $d_i=2$ и $x_i=u_i=0$. После завершения восстановления прибора – $d_i=0$ и $x_i=0,\ u_i=0$; после завершения обслуживания заявки – $d_i=0,\ x_i=0,\ u_i>0$.

Опишем смыслы компонентов векторов $\mathbf{d}$, $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$ с номерами k, отличными от i. Если $d_k=1$, то оставшееся время до конца обслуживания заявки $x_k>0$, оставшаяся наработка до отказа $u_k>0$. В случае $d_k=2$ оставшееся время до конца восстановления прибора $x_k>0$ и $u_k=0$. Если $d_k=0$, то после завершения обслуживания заявки – $x_k=0$ и $u_k>0$, а после завершения восстановления прибора – $x_k=0$ и $u_k=0$.

Определим времена пребывания системы в состояниях. Для этого введем обозначения для вектора $i\mathbf{dxu}$: $\Omega_d^1,\ \Omega_d^2,\ \Omega_d^0$ – совокупности номеров вектора $\mathbf{d}$, равных $1,2,0$ соответственно; $|\mathbf{d}|$ – число нулевых компонент вектора $\mathbf{d}$ (число элементов множества Ω_d^0), т.е. число свободных работоспособных приборов в системе; $z=\left(\underset{\substack{u_k>0\\ k\in\Omega_d^1}}{\wedge} u_k\right)\wedge\left(\underset{x_k>0}{\wedge} x_k\right)$ – минимум положительных компонент вектора $i\mathbf{dxu}$ (без учета положительных компонент $u_k>0,\ k\in\Omega_d^0$), где $\wedge$ – знак минимума.

С учетом введенных обозначений время пребывания системы в состоянии $i\mathbf{dxu}$ в случае $|\mathbf{d}|\neq 0$ определяется формулой

$$\Theta_{i\,\mathbf{dxu}}=\begin{cases}\beta\wedge\gamma_i\wedge\alpha_i\wedge z,\ d_i=1,\ u_i=0,\\ \beta\wedge\alpha_i\wedge z,\ d_i=1,\ u_i>0,\\ \beta\wedge\sigma_i\wedge z,\ d_i=2,\\ \beta\wedge z,\ d_i=0.\end{cases}\qquad(1)$$

Если какое-либо из множеств Ω_d^m $(m=0,1,2)$ пустое, то соответствующая составляющая в формуле (1) отсутствует. Так, в случае $\Omega_d^0=\varnothing$, т.е. $|\mathbf{d}|=0$, в (1) будет отсутствовать случайная величина β.

События переходов вложенной цепи Маркова связаны с реализацией минимума величин (1). Для примера рассмотрим переходы из состояния $i\mathbf{dxu}$, где $d_i=1,\ x_i=0,\ u_i>0$, т.е. i-й прибор начал обслуживать не первую заявку после восстановления (начала эксплуатации).

Если $\Theta_{i\,\mathbf{dxu}}=\alpha_i$, то система переходит в состояние $i\mathbf{d}'\mathbf{x}'\mathbf{u}'$ с плотностью вероятности $p\{i\mathbf{dxu}\to i\mathbf{d}'\mathbf{x}'\mathbf{u}'\}=f_i(y)\overline{G}(y)$, где $\overline{G}(y)=e^{-\lambda y}$, $y<z$, $d_i'=0$,

$$d'_k = d_k,\ k \neq i,\ x'_k = \begin{cases} x_k - y,\ k \in \Omega_d^1 \cup \Omega_d^2, k \neq i, \\ 0,\ k = i;\ k \in \Omega_d^0; \end{cases} \qquad u'_k = \begin{cases} u_k - y,\ k \in \Omega_d^1, \\ u_k,\ k \in \Omega_d^0 \cup \Omega_d^2. \end{cases}$$

Если $\Theta_{i\mathbf{dxu}} = \beta$, то система переходит в состояние $j\mathbf{d}'\mathbf{x}'\mathbf{u}'$, $j \in \Omega_d^0$, с плотностью вероятности $p\{i\mathbf{dxu} \to j\mathbf{d}'\mathbf{x}'\mathbf{u}'\} = \dfrac{g(y)}{|\mathbf{d}|} f_i(y + x_i)$, где $g(y) = \lambda e^{-\lambda y}$; $x_i > 0$, $d'_j = 1$,

$$d'_k = d_k,\ k \neq j,\ x'_k = \begin{cases} x_k - y,\ k \in \Omega_d^1 \cup \Omega_d^2, k \neq i, \\ 0,\ k \in \Omega_d^0, \\ x_i,\ k = i; \end{cases} \qquad u'_k = \begin{cases} u_k - y,\ k \in \Omega_d^1, \\ u_k,\ k \in \Omega_d^0 \cup \Omega_d^2. \end{cases}$$

Если $\Theta_{i\mathbf{dxu}} = z$, то система переходит в состояние $j\mathbf{d}'\mathbf{x}'\mathbf{u}'$, $j \in \Omega_d^1 \cup \Omega_d^2$, $j \neq i$, с плотностью вероятности $p\{i\mathbf{dxu} \to j\mathbf{d}'\mathbf{x}'\mathbf{u}'\} = f_i(z + x_i)\overline{G}(z)$, где $x_i > 0$. Заметим, что j – номер прибора, на котором реализуется z. Если $z = x_j$ (j-й прибор закончил обслуживание заявки или восстановился), то $d'_j = 0$. Если $z = u_j$ (j-й прибор отказал), то $d'_j = 2$; при этом $d'_k = d_k,\ k \neq j$,

$$x'_k = \begin{cases} x_k - z,\ k \in \Omega_d^1 \cup \Omega_d^2, k \neq i, j, \\ 0,\ k = j;\ k \in \Omega_d^0, \\ x_i,\ k = i; \end{cases} \qquad u'_k = \begin{cases} u_k - z,\ k \in \Omega_d^1, \\ u_k,\ k \in \Omega_d^0 \cup \Omega_d^2. \end{cases}$$

Аналогично выписываются плотности вероятностей переходов из остальных состояний. Очевидно, что в случае пустого подмножества Ω_d^m $(m = 0,1,2)$ соответствующий множитель в выражении для плотности вероятности перехода отсутствует. Например, в случае $|\mathbf{d}| = 0$ отсутствует множитель $\overline{G}(y)$.

Стационарное распределение вложенной цепи Маркова.

Стационарное распределение вложенной цепи Маркова $\{S_n,\ n \geq 0\}$ найдем из системы уравнений

$$\rho(B) = \int_E \rho(de) P(e, B), \tag{2}$$

где $P(e, B)$ – вероятность перехода из состояния e во множество состояний B; $\rho(\cdot)$ – стационарное распределение вложенной цепи Маркова [8,9].

Прежде чем сформулировать теорему о виде стационарного распределения, приведем некоторые сведения из теории процессов восстановления, см., например, [10]. Времена обслуживания заявок на каждом приборе порождают рекуррентные потоки восстановлений. Обозначим $H_{f_k}(t),\ k = \overline{1, N}$, функции восстановлений этих потоков, которые порождаются временами α_k обслуживания заявок: $H_{f_k}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_k^{*(n)}(t)$, где $F_k^{*(n)}(t)$ – n-кратная свертка функции распределения $F_k(t)$; $h_{f_k}(t) = \dfrac{d}{dt} H_{f_k}(t)$ – плотности

соответствующих функций восстановления; $V_{f_k}(t,x)$ – функции распределения для прямых остаточных времен (перескока), т.е. времен после момента t до ближайшего момента восстановления, $v_{f_k}(t,x)$ – плотности распределения для соответствующих прямых остаточных времен:

$$V_{f_k}(t,x) = F_k(t+x) - \int_0^t \overline{F_k}(t+x-s)h_{f_k}(s)ds\,,$$

$$v_{f_k}(t,x) = f_k(t+x) + \int_0^t h_{f_k}(t-s)f_k(s+x)ds\,.$$

Из определения плотности распределения прямого остаточного времени несложно установить тождество, которое используем далее

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty v_{f_k}(s,x_k+t)\phi_k(s+u_k+t)ds = f_k(x_k+t)\phi_k(u_k+t) + f_k(x_k+t)\int_0^\infty h_{f_k}(s)\phi_k(s+u_k+t)ds\,. \quad (3)$$

Теорема 1.

Стационарное распределение вложенной цепи Маркова $\{S_n,\, n\ge 0\}$ полумарковского процесса $S(t)$ определяется выражениями

$$\rho(i\mathbf{dxu}) = \rho a_i(u_i)\prod_{\substack{k\in\Omega_d^0\\ u_k>0}}\int_0^\infty h_{f_k}(s)\phi_k(s+u_k)ds\prod_{\substack{k\in\Omega_d^1\\ k\ne i}}\int_0^\infty v_{f_k}(s,x_k)\phi_k(s+u_k)ds\prod_{\substack{k\in\Omega_d^2\\ k\ne i}}\overline{\Psi_k}(x_k)\,,$$

$$i=\overline{1,N}\,, \quad (4)$$

$$\rho = \begin{cases} \rho_0\dfrac{|\mathbf{d}|!}{\lambda^{|\mathbf{d}|}},\ d_i\ne 0,\\ \rho_0\dfrac{(|\mathbf{d}|-1)!}{\lambda^{|\mathbf{d}|-1}},\ d_i=0, \end{cases} \qquad \rho_0 = const\,;\ \ a_i(u_i) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty h_{f_i}(s)\phi_i(s+u_k)ds,\ d_i=0,1,\ u_i>0,\\ 1,\quad d_i=0,1,\ u_i=0;\ d_i=2. \end{cases}$$

Значение постоянной ρ_0 определяется из условия нормировки.

В справедливости утверждения теоремы можно убедиться непосредственной подстановкой выражений (4) в правую часть уравнений системы (2). Проделаем это для одного из уравнений в случае $d_i=1,\ u_i>0$, $|\mathbf{d}|\ne 0$. Соответствующее уравнение имеет вид

$$\rho(i\mathbf{dxu}) = \sum_{k\in\Omega_{d'}^0}\int_0^\infty \frac{g(t)}{|\mathbf{d}'|}\rho\big[k\,\mathbf{d}'(\mathbf{x}+t)(\mathbf{u}+t)\big]dt +$$

$$+\sum_{\substack{k\in\Omega_{d'}^1\\ u_k'=0}}\int_0^\infty \frac{g(t)}{|\mathbf{d}'|}f_k(t+x_k)\phi_k(t+u_k)\,\rho\big[k\,\mathbf{d}'(\mathbf{x}+t)^{(k)}(\mathbf{u}+t)^{(k)}\big]dt + \quad (5)$$

$$+\sum_{\substack{k\in\Omega_{d'}^1\\ u_k'>0}}\int_0^\infty \frac{g(t)}{|\mathbf{d}'|}f_k(t+x_k)\,\rho\big[k\,\mathbf{d}'(\mathbf{x}+t)^{(k)}(\mathbf{u}+t)\big]dt + \sum_{k\in\Omega_{d'}^2}\int_0^\infty \frac{g(t)}{|\mathbf{d}'|}\psi_k(t+x_k)\,\rho\big[k\,\mathbf{d}'(\mathbf{x}+t)^{(k)}(\mathbf{u}+t)\big]dt\,,$$

$$d'_i = 0\ ,\quad d'_k = d_k,\ k \neq i\ ;\quad \Omega^0_{d'} = \Omega^0_d \cup \{i\}\ ,\quad \Omega^1_{d'} = \Omega^1_d - \{i\}\ ,\quad \Omega^2_{d'} = \Omega^2_d\ ;$$

$$\left[(\mathbf{x}+t)\right]_j = \begin{cases} x_j + t,\ j \in \Omega^1_{d'} \cup \Omega^2_{d'} \\ 0, \text{ для остальных } j, \end{cases} \quad \left[(\mathbf{x}+t)^{(k)}\right]_j = \begin{cases} x_j + t,\ j \in \Omega^1_{d'} \cup \Omega^2_{d'},\ j \neq k, \\ 0, \text{ для остальных } j, \end{cases}$$

$$\left[(\mathbf{u}+t)\right]_j = \begin{cases} u_j + t,\ j \in \Omega^1_{d'}, \\ u_j, \text{ для остальных } j, \end{cases} \quad \left[(\mathbf{u}+t)^{(k)}\right]_j = \begin{cases} u_j + t,\ j \in \Omega^1_{d'},\ j \neq k, \\ 0,\ j = k, \\ u_j, \text{ для остальных } j, \end{cases} \quad j = \overline{1,N}\ .$$

Подставим в правую часть уравнения (5) выражения (4). Учитывая, что $|\mathbf{d}'| = |\mathbf{d}| + 1$ и тождество (3), получим

$$\rho_0 \frac{|\mathbf{d}|!}{\lambda^{|\mathbf{d}|}} \prod_{\substack{k \in \Omega^0_{d'} \\ u'_k > 0}} \int_0^\infty h_{f_k}(s)\phi_k(s+u_k)ds \int_0^\infty g(t) \prod_{k \in \Omega^2_{d'}} \overline{\Psi_k}(x_k+t)dt \prod_{k \in \Omega^1_{d'}} \int_0^\infty v_{f_k}(s, x_k+t)\phi_k(s+u_k+t)ds +$$

$$+\rho_0 \frac{(|\mathbf{d}|+1)!}{\lambda^{|\mathbf{d}|+1}} \prod_{\substack{k \in \Omega^0_{d'} \\ u'_k > 0}} \int_0^\infty h_{f_k}(s)\phi_k(s+u_k)ds \sum_{\substack{k \in \Omega^1_{d'} \\ u'_k = 0}} \int_0^\infty \frac{\lambda \overline{G}(t)}{|\mathbf{d}|+1} f_k(t+x_k)\phi_k(t+u_k) \prod_{k \in \Omega^2_{d'}} \overline{\Psi_k}(x_k+t)dt \times$$

$$\times \prod_{\substack{j \in \Omega^1_{d'} \\ j \neq k}} \int_0^\infty v_{f_j}(s, x_j+t)\phi_j(s+u_j+t)ds + \rho_0 \frac{(|\mathbf{d}|+1)!}{\lambda^{|\mathbf{d}|+1}} \prod_{\substack{k \in \Omega^0_{d'} \\ u'_k > 0}} \int_0^\infty h_{f_k}(s)\phi_k(s+u_k)ds \times$$

$$\times \sum_{\substack{k \in \Omega^1_{d'} \\ u'_k > 0}} \int_0^\infty \frac{\lambda \overline{G}(t)}{|\mathbf{d}|+1} f_k(t+x_k) \prod_{k \in \Omega^2_{d'}} \overline{\Psi_k}(x_k+t)dt \int_0^\infty h_{f_k}(s)\phi_k(s+u_k+t)ds \prod_{\substack{j \in \Omega^1_{d'} \\ j \neq k}} \int_0^\infty v_{f_j}(s, x_j+t)\phi_j(s+u_j+t)ds +$$

$$+\rho_0 \frac{(|\mathbf{d}|+1)!}{\lambda^{|\mathbf{d}|+1}} \prod_{\substack{k \in \Omega^0_{d'} \\ u'_k > 0}} \int_0^\infty h_{f_k}(s)\phi_k(s+u_k)ds \sum_{k \in \Omega^2_{d'}} \int_0^\infty \frac{\lambda \overline{G}(t)}{|\mathbf{d}|+1} \psi_k(t+x_k) \prod_{\substack{j \in \Omega^2_{d'} \\ j \neq k}} \overline{\Psi_j}(x_j+t)dt \times$$

$$\times \prod_{k \in \Omega^1_{d'}} \int_0^\infty v_{f_k}(s, x_k+t)\phi_k(s+u_k+t)ds =$$

$$= -\rho_0 \frac{|\mathbf{d}|!}{\lambda^{|\mathbf{d}|}} \prod_{\substack{k \in \Omega^0_{d'} \\ u'_k > 0}} \int_0^\infty h_{f_k}(s)\phi_k(s+u_k)ds \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \overline{G}(t) \prod_{k \in \Omega^2_{d'}} \overline{\Psi_k}(x_k+t)dt \prod_{k \in \Omega^1_{d'}} \int_0^\infty v_{f_k}(s, x_k+t)\phi_k(s+u_k+t)ds \right\} =$$

$$= \rho_0 \frac{|\mathbf{d}|!}{\lambda^{|\mathbf{d}|}} a(u_i) \prod_{\substack{k \in \Omega^0_d \\ u_k > 0}} \int_0^\infty h_{f_k}(s)\phi_k(s+u_k)ds \prod_{\substack{k \in \Omega^1_d \\ k \neq i}} \int_0^\infty v_{f_k}(s, x_k)\phi_k(s+u_k)ds \prod_{k \in \Omega^2_d} \overline{\Psi_k}(x_k) = \rho(i\mathbf{dxu})\ .$$

Аналогично можно убедиться, что выражения (4) определяют решения остальных уравнений системы (2).

Стационарные вероятности состояний.

Если фазовое пространство состояний E системы представимо в виде объединения непересекающихся подмножеств $E = \bigcup_{i=0}^{N} E_i,\ E_i \bigcap E_j = \varnothing$ то, как

известно [8,9], стационарные вероятности p_i^* пребывания системы в подмножествах состояний определяются формулами

$$p_i^* = \int\limits_{E_i} m(e)\rho(de)\left(\int\limits_{E} m(e)\rho(de)\right)^{-1},\ i=\overline{0,N}, \qquad (6)$$

где $m(e)$ – среднее время пребывания системы в состоянии $e\in E$, $\rho(\cdot)$ – стационарное распределение вложенной цепи Маркова.

С помощью равенств (6) найдем стационарные вероятности пребывания рассматриваемой системы обслуживания в различных физических состояниях. Обозначим D – множество всех векторов $\mathbf{d}$, описывающих физические состояния, а D^* – некоторое его подмножество. Пусть $E_{D^*}=\left\{ i\mathbf{dxu},\ i=\overline{1,N},\ \mathbf{d}\in D^*\right\}$ – подмножество фазовых состояний системы, дискретная составляющая которых принадлежит D^*. Найдем выражение для $\int\limits_{E_{D^*}} m(e)\rho(de)=\sum\limits_{\mathbf{d}\in D^*}\int\limits_{E_{\mathbf{d}}} m(e)\rho(de)$, где $E_{\mathbf{d}}$ – подмножества фазовых состояний из E с фиксированным вектором состояний $\mathbf{d}$. Заметим, что подмножество $E_{\mathbf{d}}$ содержит состояния, в которых свое физическое состояние последним изменил любой прибор. Если некоторая компонента вектора $\mathbf{d}$ соответствует прибору, обслуживающему заявку или восстанавливающемуся, т.е. $d_k=1$ или $d_k=2$, то $E_{\mathbf{d}}$ содержит как состояния в которых $x_k=0$, так и $x_k>0$. Аналогично, если некоторая компонента d_k вектора $\mathbf{d}$ равна 0 или 1, то $E_{\mathbf{d}}$ содержит состояния, в которых $u_k=0$ и $u_k>0$.

Учитывая вид стационарного распределения (4), средние времена пребывания в состояниях в результате преобразований получим

$$\int\limits_{E_{\mathbf{d}}} m(e)\rho(de)=\rho_0\frac{|\mathbf{d}|!}{\lambda^{|\mathbf{d}|}}\prod_{k\in\Omega_d^0}\int\limits_0^\infty \hat{H}_{f_k}(s)\phi_k(s)ds\left[\sum_{i\in\Omega_d^1}\int\limits_0^\infty \overline{G}(t)\overline{F}_i(t)\left(\overline{\Phi}_i(t)+\int\limits_0^\infty h_{f_i}(s)\overline{\Phi}_i(s+t)ds\right)dt\times\right.$$

$$\times\prod_{\substack{k\in\Omega_d^1\\k\neq i}}\int\limits_0^\infty \overline{V}_{f_k}(s,t)\overline{\Phi}_k(s+t)ds\prod_{k\in\Omega_d^2}\int\limits_t^\infty\overline{\Psi_k}(x_k)dx_k+\sum_{i\in\Omega_d^2}\int\limits_0^\infty\overline{G}(t)\overline{\Psi}_i(t)dt\times$$

$$\left.\times\prod_{k\in\Omega_d^1}\int\limits_0^\infty\overline{V}_{f_k}(s,t)\overline{\Phi}_k(s+t)ds\prod_{\substack{k\in\Omega_d^2\\k\neq i}}\int\limits_t^\infty\overline{\Psi_k}(x_k)dx_k\right]+$$

$$+\rho_0\frac{\left(|\mathbf{d}|-1\right)!}{\lambda^{|\mathbf{d}|-1}}\prod_{k\in\Omega_d^0}\int\limits_0^\infty\hat{H}_{f_k}(s)\phi_k(s)ds\sum_{i\in\Omega_d^2}\int\limits_0^\infty\overline{G}(t)dt\prod_{k\in\Omega_d^1}\int\limits_0^\infty\overline{V}_{f_k}(s,t)\overline{\Phi}_k(s+t)ds\prod_{k\in\Omega_d^2}\int\limits_t^\infty\overline{\Psi_k}(x_k)dx_k,$$

где $\hat{H}_{f_k}(s)=1+H_{f_k}(s)$. Применив тождество

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^\infty\overline{V}_{f_k}(s,x_k+t)\overline{\Phi}_k(s+t)ds=\overline{F}_k(t)\overline{\Phi}_k(t)+\overline{F}_k(t)\int\limits_0^\infty h_{f_k}(s)\overline{\Phi}_k(s+t)ds,$$

окончательно получим

$$\int_{E_{\mathbf{d}}} m(e)\rho(de) = -\rho_0 \frac{|\mathbf{d}|!}{\lambda^{|\mathbf{d}|}} \prod_{k\in\Omega_d^0} \int_0^\infty \hat{H}_{f_k}(s)\phi_k(s)ds \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{G}(t) \prod_{k\in\Omega_d^1} \int_0^\infty \overline{V}_{f_k}(s,t)\overline{\Phi}_k(s+t)ds \prod_{k\in\Omega_d^2} \int_t^\infty \overline{\Psi_k}(x_k)dx_k \right] dt =$$

$$= \frac{|\mathbf{d}|!}{\lambda^{|\mathbf{d}|}} \prod_{k\in\Omega_d^0} \int_0^\infty \hat{H}_{f_k}(s)\phi_k(s)ds \prod_{k\in\Omega_d^1} M\gamma_k \prod_{k\in\Omega_d^2} M\sigma_k .$$

Заметим, что $\int_0^\infty \hat{H}_{f_k}(s)\phi_k(s)ds$ – среднее число заявок, принятых к обслуживанию между двумя соседними отказами k-го прибора. Таким образом,

$$\int_{E_{D^*}} m(e)\rho(de) = \sum_{\mathbf{d}\in D^*} \frac{|\mathbf{d}|!}{\lambda^{|\mathbf{d}|}} \prod_{k\in\Omega_d^0} \int_0^\infty \hat{H}_{f_k}(s)\phi_k(s)ds \prod_{k\in\Omega_d^1} M\gamma_k \prod_{k\in\Omega_d^2} M\sigma_k .$$

Следовательно, стационарная вероятность $p^*(D^*)$ пребывания системы в подмножестве физических состояний D^* вычисляется по формуле

$$p^*(D^*) = \frac{\sum_{\mathbf{d}\in D^*} \frac{|\mathbf{d}|!}{\lambda^{|\mathbf{d}|}} \prod_{k\in\Omega_d^0} \int_0^\infty \hat{H}_{f_k}(s)\phi_k(s)ds \prod_{k\in\Omega_d^1} M\gamma_k \prod_{k\in\Omega_d^2} M\sigma_k}{\sum_{\mathbf{d}\in D} \frac{|\mathbf{d}|!}{\lambda^{|\mathbf{d}|}} \prod_{k\in\Omega_d^0} \int_0^\infty \hat{H}_{f_k}(s)\phi_k(s)ds \prod_{k\in\Omega_d^1} M\gamma_k \prod_{k\in\Omega_d^2} M\sigma_k},$$

или

$$p^*(D^*) = \frac{\sum_{\mathbf{d}\in D^*} \frac{|\mathbf{d}|!}{\lambda^{|\mathbf{d}|}} \prod_{k\in\Omega_d^0} \int_0^\infty \hat{H}_{f_k}(s)\phi_k(s)ds \prod_{k\in\Omega_d^1} M\gamma_k \prod_{k\in\Omega_d^2} M\sigma_k}{\sum_{n=0}^{N} \frac{(N-n)!}{\lambda^{N-n}} \sum_{\{s_1,\ldots,s_n\}} \prod_{\substack{i=1 \\ \{s_1,\ldots,s_n\}}}^{n} \left(M\gamma_{s_i} + M\sigma_{s_i}\right) \prod_{\substack{j=1 \\ \{s'_1,\ldots,s'_{N-n}\}}}^{N-n} \int_0^\infty \hat{H}_{f_{s'_j}}(s)\phi_{s'_j}(s)ds} \qquad (7)$$

где $\{s_1,\ldots,s_n\}$ – некоторое сочетание из $\{1,\ldots,N\}$ по n; $\{s'_1,\ldots,s'_{N-n}\}$ – дополнительное сочетание из $\{1,\ldots,N\}$ по $N-n$.

В частности, пусть k число занятых приборов в системе (как обслуживающих заявки, так и восстанавливающихся). Тогда число свободных работоспособных приборов равно $|\mathbf{d}| = N-k$. Обозначим D_k^* множество векторов $\mathbf{d}$, число ненулевых компонент которых равно k. Из формулы (7) вытекает, что стационарная вероятность того, что в системе занято k приборов, равна

$$p_k^* = p(D_k^*) = \frac{\dfrac{(N-k)!}{\lambda^{N-k}} \sum\limits_{\{s_1,\ldots,s_k\}} \prod\limits_{\substack{i=1 \\ \{s_1,\ldots,s_k\}}}^{k} \left(M\gamma_{s_i} + M\sigma_{s_i}\right) \prod\limits_{\substack{j=1 \\ \{s'_1,\ldots,s'_{N-k}\}}}^{N-k} \int\limits_0^\infty \hat{H}_{f_{s'_j}}(s)\phi_{s'_j}(s)ds}{\sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{(N-n)!}{\lambda^{N-n}} \sum\limits_{\{s_1,\ldots,s_n\}} \prod\limits_{\substack{i=1 \\ \{s_1,\ldots,s_n\}}}^{n} \left(M\gamma_{s_i} + M\sigma_{s_i}\right) \prod\limits_{\substack{j=1 \\ \{s'_1,\ldots,s'_{N-n}\}}}^{N-n} \int\limits_0^\infty \hat{H}_{f_{s'_j}}(s)\phi_{s'_j}(s)ds}, \; k = \overline{0,N}. \quad (8)$$

Если обозначить $\Lambda_{s_i} = \dfrac{\lambda\left(M\gamma_{s_i} + M\sigma_{s_i}\right)}{\int\limits_0^\infty \hat{H}_{f_{s_i}}(s)\phi_{s_i}(s)ds}$ «показатель нагрузки» s_i-го прибора, то формула (8) примет вид

$$p_k^* = \frac{(N-k)! \sum\limits_{\{s_1,\ldots,s_k\}} \prod\limits_{\substack{i=1 \\ \{s_1,\ldots,s_k\}}}^{k} \Lambda_{s_i}}{\sum\limits_{n=0}^{N} (N-n)! \sum\limits_{\{s_1,\ldots,s_n\}} \prod\limits_{\substack{i=1 \\ \{s_1,\ldots,s_n\}}}^{n} \Lambda_{s_i}}, \; k = \overline{0,N}. \quad (9)$$

Заметим, что в случае системы с надежными приборами формула (8) совпадает с известной [11].

В случае показательного распределения всех входящих параметров системы, т.е. когда $f_k(t) = \mu_k e^{-\mu_k t}$, $\phi_k(t) = \varsigma_k e^{-\varsigma_k t}$, $\psi_k(t) = \xi_k e^{-\xi_k t}$, $t > 0$, показатель нагрузки s_i-го прибора определяется формулой $\Lambda_{s_i} = \dfrac{\lambda}{\xi_{s_i}} \dfrac{\xi_{s_i} + \varsigma_{s_i}}{\mu_{s_i} + \varsigma_{s_i}}$.

Относительная пропускная способность системы $q = 1 - p_N^*$, абсолютная пропускная способность $A = \lambda q$, среднее число занятых каналов $\overline{N} = \sum\limits_{k=1}^{N} k p_k^*$.

Для однородной системы обслуживания, в которой все каналы описываются одинаковыми случайными величинами, равенства (9) принимают вид формул Эрланга [3]

$$p_k^* = \frac{\Lambda^k / k!}{\sum\limits_{n=0}^{N} \Lambda^n / n!}, \quad (10)$$

где $\Lambda = \dfrac{\lambda\left(M\gamma + M\sigma\right)}{\int\limits_0^\infty \hat{H}_f(s)\phi(s)ds}$, $k = \overline{0,N}$. В частном случае, когда $f(t) = \mu e^{-\mu t}$, $\phi(t) = \varsigma e^{-\varsigma t}$, $\psi(t) = \xi e^{-\xi t}$, $t > 0$, имеем $\Lambda = \dfrac{\lambda}{\xi} \dfrac{\xi + \varsigma}{\mu + \varsigma}$.

Рассмотрим состояния системы, в которых учитывается причина занятости

канала. Пусть $D^*_{m,k-m}$ – подмножество физических состояний, когда в системе занято k приборов, из них m приборов обслуживают заявки, а остальные $k-m$ – восстанавливаются после отказов. В случае однородной системы формулы (9) принимают вид

$$p^*_{m,k-m} = \frac{\lambda^k}{\left(\int_0^\infty \hat{H}_f(s)\phi(s)ds\right)^k} \frac{\left[M\gamma\right]^m \left[M\sigma\right]^{k-m}}{m!(k-m)!\sum_{n=0}^{N}\Lambda^n/n!}.$$

В частном случае, когда $f(t)=\mu e^{-\mu t}$, $\phi(t)=\varsigma e^{-\varsigma t}$, $\psi(t)=\xi e^{-\xi t}$, $t>0$,

$$p^*_{m,k-m} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{\varsigma}{\xi}\right)^{k-m} \left[\left(1+\frac{\varsigma}{\mu}\right)^k m!(k-m)!\sum_{n=0}^{N}\Lambda^n/n!\right]^{-1}.$$

Среднее стационарное время пребывания в состояниях.

Пусть множество физических состояний системы представимо в виде $D = D_+ \bigcup D_-$, $D_+ \bigcap D_- = \varnothing$. При этих предположениях пространство состояний E разбивается на два непересекающихся подмножества $E = E_{D_+} \bigcup E_{D_-}$, где $E_{D_\pm} = \left\{ i\mathbf{dxu},\ i=\overline{1,N},\ \mathbf{d}\in D_\pm \right\}$.

Обозначим D'_+ множество пограничных физических состояний, т.е. множество векторов $\mathbf{d}\in D_+$, изменение одной из компонент которых переводит вектор $\mathbf{d}$ во множество D_-. Для вектора $\mathbf{d}\in D'_+$ обозначим $G^k_m(\mathbf{d})$ множество номеров его компонент, изменение значения каждой из которых с m на k $(m,\ k=1,2,0)$, переводит вектор в D_-.

Среднее стационарное время $T(E_{D_+})$ пребывания полумарковского процесса $S(t)$ в подмножестве состояний E_{D_+} определяется формулой [8,9]

$$T(E_{D_+}) = \int_{E_{D_+}} m(e)\rho(de)\left[\int_{E_{D_+}} \rho(de)P(e,E_{D_-})\right]^{-1}.$$

Для рассматриваемой модели, учитывая вид стационарного распределения (4) и вероятности перехода вложенной цепи Маркова, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.

Среднее стационарное время пребывания системы в подмножестве состояний E_{D_+} определяется формулой

$$T(E_{D_+}) = \frac{1}{B}\sum_{\mathbf{d}\in D_+} \frac{|\mathbf{d}|!}{\lambda^{|\mathbf{d}|}} \prod_{k\in\Omega^0_d} \int_0^\infty \hat{H}_{f_k}(s)\phi_k(s)ds \prod_{k\in\Omega^1_d} M\gamma_k \prod_{k\in\Omega^2_d} M\sigma_k, \qquad (11)$$

где

$$B=\sum_{\mathbf{d}\in D_+'}\left\{\frac{\left(|\mathbf{d}|-1\right)!}{\lambda^{|\mathbf{d}|-1}}\sum_{m\in G_0^1(\mathbf{d})}\prod_{k\in\Omega_d^0}\int_0^\infty\hat{H}_{f_k}(s)\phi_k(s)ds\prod_{k\in\Omega_d^1}M\gamma_k\prod_{k\in\Omega_d^2}M\sigma_k+\right.$$

$$+\frac{|\mathbf{d}|!}{\lambda^{|\mathbf{d}|}}\left[\sum_{m\in G_2^0(\mathbf{d})}\prod_{k\in\Omega_d^0}\int_0^\infty\hat{H}_{f_k}(s)\phi_k(s)ds\prod_{k\in\Omega_d^1}M\gamma_k\prod_{\substack{k\in\Omega_d^2\\k\neq m}}M\sigma_k+\right.$$

$$+\sum_{m\in G_1^0(\mathbf{d})}\int_0^\infty H_{f_m}(s)\phi_m(s)ds\prod_{k\in\Omega_d^0}\int_0^\infty\hat{H}_{f_k}(s)\phi_k(s)ds\prod_{\substack{k\in\Omega_d^1\\k\neq m}}M\gamma_k\prod_{k\in\Omega_d^2}M\sigma_k+$$

$$\left.\left.+\sum_{m\in G_1^2(\mathbf{d})}\prod_{k\in\Omega_d^0}\int_0^\infty\hat{H}_{f_k}(s)\phi_k(s)ds\prod_{\substack{k\in\Omega_d^1\\k\neq m}}M\gamma_k\prod_{k\in\Omega_d^2}M\sigma_k\right]\right\}.$$

В случае какого-либо пустого из множеств $G_m^k(\mathbf{d})$ соответствующие слагаемые в (11) следует опустить.

Из (11) следует, что среднее время, в течение которого заняты k приборов системы, определяется выражением

$$T_k=T(E_{D_k^*})=\frac{\dfrac{(N-k)!}{\lambda^{N-k}}\sum\limits_{\{s_1,\ldots,s_k\}}\prod\limits_{i=1}^{k}\left(M\gamma_{s_i}+M\sigma_{s_i}\right)\prod\limits_{\{s_1',\ldots,s_{N-k}'\}}^{N-k}\int_0^\infty\hat{H}_{f_{s_j'}}(s)\phi_{s_j'}(s)ds}{\sum\limits_{\{s_1,\ldots,s_k\}}\left\{\dfrac{(N-k)!}{\lambda^{N-k}}\sum\limits_{i=1}^{k}\int_0^\infty\hat{H}_{f_{s_i}}(s)\phi_{s_i}(s)ds\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k}\left[M\gamma_{s_j}+M\sigma_{s_j}\right]\prod\limits_{\{s_1',\ldots,s_{N-k}'\}}^{N-k}\int_0^\infty\hat{H}_{f_{s_j'}}(s)\phi_{s_j'}(s)ds\right\}}$$

или

$$T_k=\frac{\sum\limits_{\{s_1,\ldots,s_k\}}\prod\limits_{i=1}^{k}\Lambda_{s_i}}{\lambda\sum\limits_{\{s_1,\ldots,s_k\}}\sum\limits_{i=1}^{k}\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k}\Lambda_{s_j}}=\frac{\sum\limits_{\{s_1,\ldots,s_k\}}\prod\limits_{i=1}^{k}\Lambda_{s_i}}{\lambda(N-k+1)\sum\limits_{\{s_1,\ldots,s_{k-1}\}}\prod\limits_{i=1}^{k-1}\Lambda_{s_i}},\qquad(12)$$

где $k=\overline{1,N}$; $\{s_1,\ldots,s_k\}$ – некоторое сочетание из $\{1,2,\ldots,N\}$ по k, $\{s_1',\ldots,s_{N-k}'\}$ – дополнительное сочетание из $\{1,\ldots,N\}$ по $N-k$; $\{s_1,\ldots,s_{k-1}\}$ – некоторое сочетание из $\{1,2,\ldots,N\}$ по $k-1$.

В частности, среднее время, в течение которого все каналы системы свободны, равно $T_0=1/\lambda$, а все приборы заняты –

$$T_N = \frac{\prod_{j=1}^{N}(M\gamma_j + M\sigma_j)}{\sum_{i=1}^{N}\int_0^{\infty}\hat{H}_{f_i}(s)\phi_i(s)ds\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}(M\gamma_j + M\sigma_j)} = \frac{\prod_{j=1}^{N}\Lambda_j}{\lambda\sum_{i=1}^{N}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\Lambda_j} = \frac{1}{\lambda\sum_{i=1}^{N}\Lambda_i^{-1}}.$$

Для однородно системы формула (12) принимает вид

$$T_k = \frac{M\gamma + M\sigma}{k\int_0^{\infty}\hat{H}_f(s)\phi(s)ds},\ k = \overline{1,N}.$$

Численный пример.

В систему из пяти приборов поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0,5$ 1/мин. Значения средних времен обслуживания заявок, наработок до отказа и восстановлений приборов размещены в Таблице 1. Требуется найти стационарные показатели системы в случае, когда времена обслуживания заявок распределены по закону Эрланга четвертого порядка, наработки до отказа – по закону Эрланга третьего порядка. Полученные показатели сравнить с соответствующими показателями системы из надежных приборов, а также с показателями системы, в которой все определяющие параметры ее приборов распределены по показательному закону с такими же средними значениями, как и в случае распределений Эрланга.

Таблица 1 – Параметры системы

Параметры прибора	Номер прибора				
	1	2	3	4	5
Среднее время обслуживания $M\alpha_k$, мин	4	5,714	5	4,444	6,667
Среднее время наработки до отказа $M\gamma_k$, мин	30	60	66,667	40	75
Среднее время восстановления $M\sigma_k$, мин	1,111	1,25	1,667	1,818	1,333

Результаты расчетов по формулам (9) и (12) стационарных показателей для ненадежных и надежных систем в случае стохастических параметров приборов эрланговского типа помещены в Таблице 2, в случае показательных распределений – в Таблице 3.

Таблица 2 – Стационарные показатели эрланговской системы

Стационарные вероятности состояний системы						Относительная пропускная способность	Среднее число занятых приборов
p_0^*	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*	q	$\overline{N}$
Ненадежная система							
0,087	0,218	0,271	0,222	0,135	0,066	0,934	2,297
Надежная система							
0,081	0,209	0,268	0,227	0,143	0,071	0,929	2,356

Средние стационарные времена пребывания в состояниях T_k, мин											
Ненадежная система						Надежная система					
T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
2	5,001	2,480	1,640	1,220	0,968	2,000	5,165	2,561	1,693	1,260	1,00

Таблица 3 – Стационарные показатели экспоненциальной системы

Стационарные вероятности состояний системы						Относительная пропускная способность					Среднее число занятых приборов
p_0^*	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*	q					$\overline{N}$
Ненадежная система											
0,094	0,228	0,274	0,217	0,128	0,060	0,940					2,233
Надежная система											
0,081	0,209	0,268	0,227	0,143	0,071	0,929					2,356
Средние стационарные времена пребывания в состояниях T_k, мин											
Ненадежная система						Надежная система					
T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
2	4,833	2,396	1,584	1,178	0,934	2,000	5,165	2,561	1,693	1,260	1,00

Из полученных результатов следует, что по сравнению с надежной системой относительная пропускная способность ненадежной системы в случае эрланговских распределений параметров уменьшается на 0,54%, а в случае экспоненциальных распределений – на 1,18%. Для ненадежной эрланговской системы относительная пропускная способность на 0,64% меньше, чем экспоненциальной системы. Для надежной системы стационарные показатели не зависят от видов законов распределений.

Заключение.

Построена полумарковская модель функционирования неоднородной ненадежной восстанавливаемой многокомпонентной системы обслуживания без очереди и учетом отказов приборов в зависимости от их наработки. Все стохастические параметры, описывающую систему, кроме входящего простейшего потока заявок, имеют распределения общего вида. Полученные расчетные формулы для вычисления стационарных характеристик системы позволяют оценить влияние надежностных параметров приборов на показатели системы. Результаты статьи могут быть использованы для более адекватного описания функционирования современных технических и информационных систем в самых различных предметных областях.

Библиографический список.

1. Марьянович Т.П. Обобщение формул Эрланга на случай, когда приборы могут выходить из строя и восстанавливаться / Т.П. Марьянович // Украинский математический журнал. – 1960. – № 3(12). – С. 279-286.
2. Золотарев В.М. Распределение длины очереди и числа действующих линий в системе типа Эрланга со случайными поломками и восстановлениями линий / В.М. Золотарев // Труды Математического института АН СССР. – 1964. – № 71. – С. 51-61.
3. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М. : ЛКИ, 2012. – 400 с.
4. Бочаров П.П. Теория массового обслуживания / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин – М. : Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
5. Матвеев В.Ф. Системы массового обслуживания / В.Ф. Матвеев, В.Г. Ушаков. – Изд-во МГУ, 1984. – 240 с.
6. Песчанский А.И. Полумарковские модели профилактики ненадежной одноканальной системы обслуживания с потерями / А.И. Песчанский. – М. :

ИНФРА-М, 2022. – 267 с.
7. Песчанский А.И. Стационарные характеристики ненадежной восстанавливаемой системы обслуживания $M/G/N/0$ / А.И. Песчанский // Автоматизация и измерения в машино- приборостроении. – 2018. – № 1(1). – С. 40-50.
8. Королюк В.С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – Киев : Наук. думка, 1982. – 236 с.
9. Корлат А.Н. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А.Н. Корлат, В.Н. Кузнецов, М.И. Новиков [и др.]. – Кишинев : Штиинца, 1991. – 209 с.
10. Beichelt F. Zuverlässigkeit und Instanphaltung, Mathematische Methoden / F. Beichelt, P. Franken. – Berlin : VEB Verlag Technik, 1983. – 392 p.
11. Копп В.Я. Стохастические модели автоматизированных производственных систем с временным резервированием / В.Я. Копп, Ю.Е. Обжерин, А.И. Песчанский. – Севастополь : Изд-во СевНТУ, 2000. – 286 с.

[1]Песчанский Алексей Иванович, д-р техн. наук, проф., профессор, peschansky_sntu@mail.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

Peschansky Aleksey Ivanovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor, peschansky_sntu@mail.ru, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

УДК 681.5.08

ПРИМЕНЕНИЕ КРИВЫХ ДУБИНСА ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Токарев Д.А.[1], Кудряшов А.В.[2], Дементьев К.В.[3]

USING DUBINS CURVES TO MAKE OPTIMAL PATHWAYS

Tokarev D.A.[1], Kudryashov A.V.[2], Dementiev K.V.[3]

Аннотация. *В данной работе был проведён анализ метода построения траекторий движения группы роботов с ограниченной манёвренностью в трёхмерном пространстве. Для построения траекторий рассматривался метод кривых Дубинса. Дополнительно проведено исследование возможностей метода в применении к предотвращению столкновений с препятствиями. Кривые, полученные в ходе исследования, представлены в статье. Результаты экспериментов показали, что метод кривых Дубинса можно использовать для построения траекторий для группы роботов в сложной трёхмерной среде с препятствиями.*

Abstract. *This paper presents an analysis of a trajectory planning method for a group of robots with limited maneuverability. The Dubins curves method was considered for trajectory generation. Additionally, the method's potential for collision avoidance with obstacles was investigated. The curves obtained during the study are presented in the article. Experimental results demonstrated that the Dubins curves method can be used for planning trajectories for a robot group in a complex environment with obstacles.*

Ключевые слова. *Генерация траекторий, кривые Дубинса, параметрические кривые.*

Keywords. *Trajectory synthesis, Dubins curves, parametrized curves.*

Введение.

Данная работа посвящена исследованию метода кривых Дубинса для генерации оптимальных траекторий, удовлетворяющих заданным параметрам (гладкость, минимальный и максимальный углы поворота, избегание препятствий).

Кривые Дубинса [1] – минимальные по длине пути кривые, соединяющие две точки на плоскости с заданными направлениями (ориентациями), учитывающие ограничение на максимальную кривизну. Они используются для моделирования траекторий транспортных средств, которые не могут совершать повороты с радиусом меньше определённого (например, самолёты, роботы, автомобили).

Кривые состоят из комбинации не более трёх сегментов:

– L (Left): дуга окружности с максимальной кривизной влево;

– R (Right): дуга окружности вправо;

– S (Straight): прямолинейный отрезок.

Существует 6 базовых кривых Дубинса, они представлены на Рис.1.

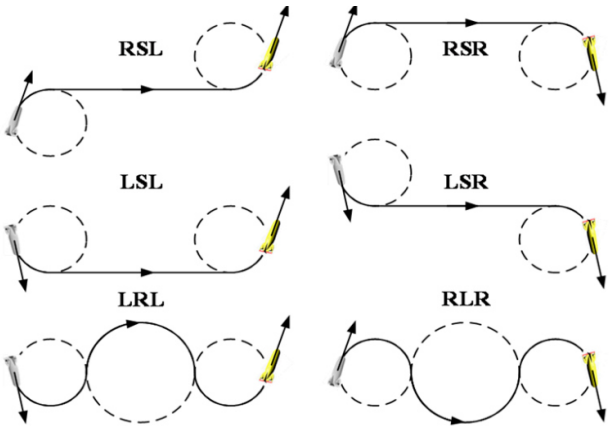


Рис.1 – Базовые типы кривых Дубинса

Кратчайший путь выбирается среди приведенных выше вариантов.

Особенностями кривых Дубинса являются гарантированная оптимальность и чувствительность к начальным условиям. Кривые Дубинса остаются фундаментальным инструментом в задачах планирования движения, сочетая математическую строгость и практическую применимость.

Классический алгоритм вычисления кратчайшей кривой Дубинса — это перебор 6 типов (или реже 46 в старых реализациях) возможных комбинаций CSC и CCC. Для каждого типа решается система уравнений (чаще всего геометрическая или тригонометрическая), выбирается кратчайшая допустимая. Это «программный подбор сегментов», а не гладкая непрерывная оптимизация. Поэтому во многих современных работах стараются заменить/аппроксимировать Дубинса чем-то более «оптимизационно-дружелюбным». Для того, чтобы иметь возможность непрерывной оптимизации кривых при помощи оптимизационных алгоритмов возможно аппроксимировать кривые Дубинса полиномом 4 порядка или выше. Тогда коэффициенты аппроксимирующего полинома можно подбирать любым подходящим методом оптимизации.

Целью исследования является реализация алгоритма синтеза траекторий для группы АНПА (автономных необитаемых подводных аппаратов), которая позволяет задавать желаемые условия и ограничения для траекторий.

Определим входные и выходные параметры алгоритма Дубинса. На входе алгоритма – начальные и конечные положения/ориентации роботов в инерциальной системе

$$\eta_0^i = \left[x_0^i \; y_0^i \; z_0^i \; \varphi_0^i \; \theta_0^i \; \psi_0^i \right]^T,$$

$$\eta^i{}_{end} = \left[x_{end}^i \; y_{end}^i \; z_{end}^i \; \varphi_{end}^i \; \theta_{end}^i \; \psi_{end}^i \right]^T$$

и скорости в локальных системах

$$v_0{}^i = \left[u_0^i \; v_0^i \; w_0^i \; p_0^i \; q_0^i \; r_0^i \right]^T,$$

$$v_{end}{}^i = \left[u_{end}^i \; v_{end}^i \; w_{end}^i \; p_{end}^i \; q_{end}^i \; r_{end}^i \right].$$

На выходе алгоритма – набор точек наиболее оптимальных траекторий (положения, ориентации, скорости) η^i и ν^i каждого *i*-го робота на заданном

интервале времени $t \in [0; t_{end}]$.

Предполагается, что угол крена всегда равен нулю, т.к. является негативным фактором при маневрах, а углы курса и тангажа определяются как углы между соседними точками траектории.

Ограничение формы кривой Дубинса позволяет оптимизировать не все многочисленные параметры полиномов, описывающих траекторию, а лишь ряд параметров, характеризующих кривизну.

Матрица полиномиальных коэффициентов:

$$T_i = \begin{bmatrix} 1 & t_0^i & \left(t_0^i\right)^2 & \left(t_0^i\right)^3 & \left(t_0^i\right)^4 \\ 0 & 1 & 2t_0^i & 3\left(t_0^i\right)^2 & 4\left(t_0^i\right)^3 \\ 1 & t_{end}^i & \left(t_{end}^i\right)^2 & \left(t_{end}^i\right)^3 & \left(t_{end}^i\right)^4 \\ 0 & 1 & 2t_{end}^i & 3\left(t_{end}^i\right)^2 & 4\left(t_{end}^i\right)^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_{end}^i & 12\left(t_{end}^i\right)^2 \end{bmatrix}.$$

Полиномы траектории *i*–го робота:

$$\begin{cases} p_x^i = T_i^{-1} \cdot \left[x_0^i u_0^i x_{end}^i u_{end}^i M_i \right]^T; \\ p_y^i = T_i^{-1} \cdot \left[y_0^i v_0^i y_{end}^i v_{end}^i N_i \right]^T; \\ p_z^i = T_i^{-1} \cdot \left[z_0^i w_0^i z_{end}^i w_{end}^i P_i \right]^T. \end{cases}$$

Необходимо подобрать оптимальные величины M_i, N_i и P_i в диапазоне $[0;1]$, которые отвечают за форму кривой Дубинса.

Для оптимизации параметров кривых Дубинса был использован метод роя частиц (PSO) [2]. PSO – это эвристический алгоритм поиска глобального оптимума, основанный на коллективном поведении стай птиц или косяков рыб. Он применяется для решения задач многомерной оптимизации, где требуется найти наилучшее решение в сложном пространстве параметров. Каждая частица в рое представляет собой потенциальное решение и движется в пространстве поиска, имея свою скорость и позицию. Скорость частицы обновляется с учётом её наилучшего найденного положения (pBest) и наилучшего положения всего роя (gBest). На каждом шаге частица корректирует свой вектор скорости, комбинируя инерцию предыдущего движения, стремление к своему лучшему опыту и стремление к коллективному опыту. Затем новая скорость добавляется к текущей позиции частицы. Этот итеративный процесс продолжается, пока рой не сойдётся к оптимальному или удовлетворительному решению.

Для достижения оптимальной траектории был разработан следующий функционал минимизации:

$$\mathrm{J} = \mathrm{L} - c_1 D_{min} + c_2 D_{max} - c_3 V_{min} + c_4 V_{max} + c_5 C_s,$$

где L – суммарная длина всех траекторий (желаем менее затратный вариант прихода в точки); $\mathrm{D_{min}}$ – сумма минимальных расстояний между точками

траекторий роботов; D_{max} – сумма максимальных расстояний между точками траекторий роботов (желаем поддерживать оптимальное расстояние для связи между роботами); V_{min} – сумма минимальных модулей линейных скоростей роботов; V_{min} – сумма максимальных модулей линейных скоростей роботов (желаем ограничить менее маневренных роботов); C – количество пересечений точек траекторий со средой (желаем накладывать штраф при пересечении со средой); c_k – коэффициенты для управления значимостью отдельных членов многочлена.

Такой функционал позволяет численно оценить получившуюся кривую сразу по нескольким критериям, что позволяет сравнивать две кривые, полученные при помощи разных коэффициентов M, N, P, и выбрать коэффициенты, которые привели к генерации более оптимальной кривой.

Используемый в настоящей работе подход базируется на исследованиях, представленных в [3-5].

Среда проведения экспериментов.

Для решения задачи разработан MatLab скрипт, выполняющий построение траекторий методом кривых Дубинса, и оптимизацию параметров кривых методом PSO.

В качестве препятствия моделировалось дно водоёма (Рис.3).

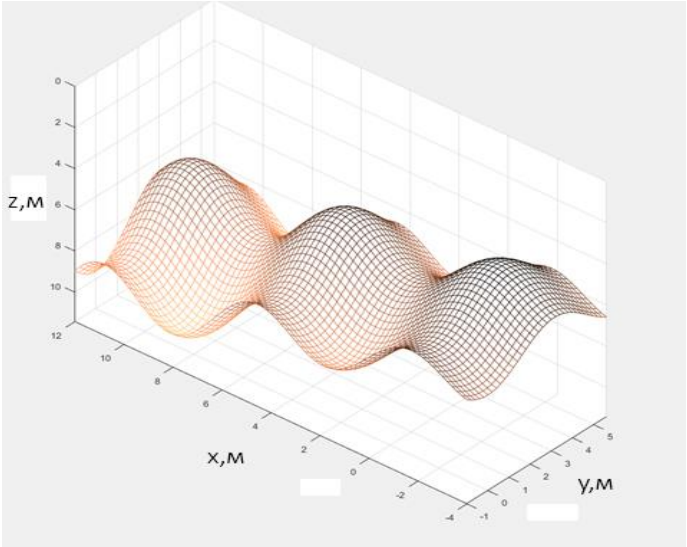


Рис.3 – Поверхность препятствия

Далее были определены стартовые и конечные точки для аппаратов, минимальный и максимальный допустимый углы поворота и другие параметры. После оптимизации параметров методом PSO проведено моделирование в ранее разработанном трёхмерном окружении. Результаты моделирования представлены на Рис.4-6.

По Рис.4 видно, что алгоритм оптимизации сходится примерно за 30 итераций, поэтому в последующих экспериментах установлено ограничение в 30 итераций.

Обработка экспериментальных данных.

В качестве практического примера выполнен эксперимент, показывающий возможность использования метода для генерации сложных траекторий, например, для окружения объекта интереса и съёмки с нескольких ракурсов. В среду эксперимента добавлен объект интереса – зелёный куб, который необходимо окружить. Результат представлен на Рис.7,8.

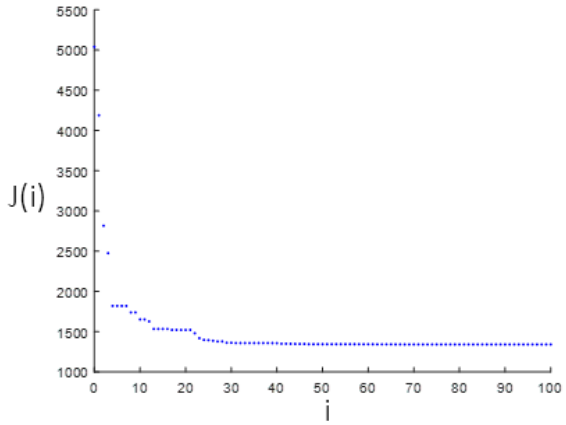


Рис.4 – Значение функции качества в зависимости от итерации алгоритма оптимизации, где i – итерация алгоритма; J(i) – значение функционала минимизации

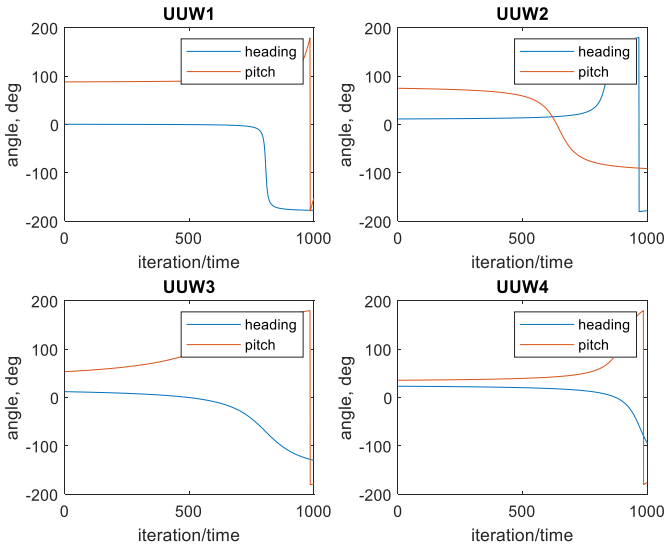


Рис.5 – Углы АНПА в зависимости от времени

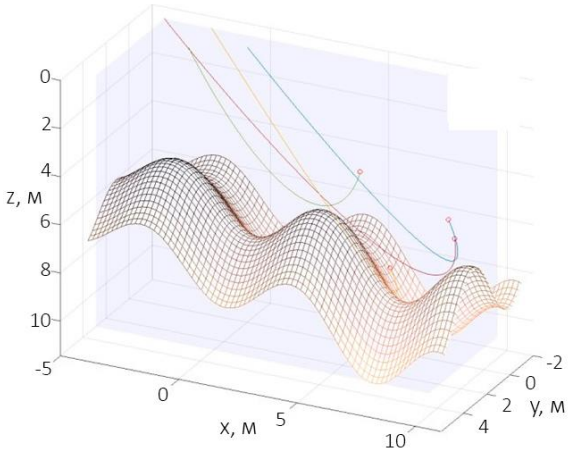


Рис.6 – Траектории АНПА

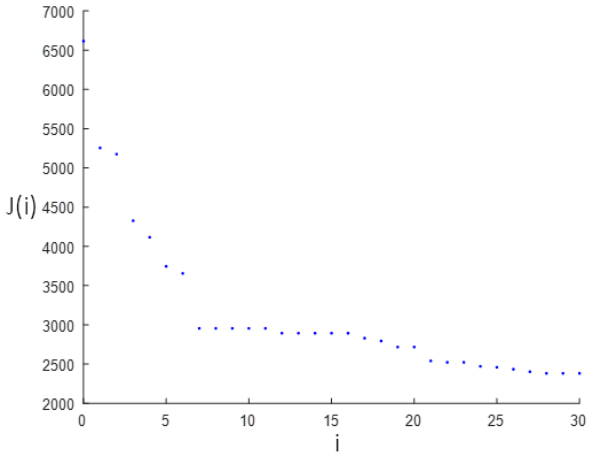


Рис.7 – Значение функции качества в зависимости от итерации алгоритма оптимизации, где i – итерация алгоритма; J(i) – значение функционала минимизации

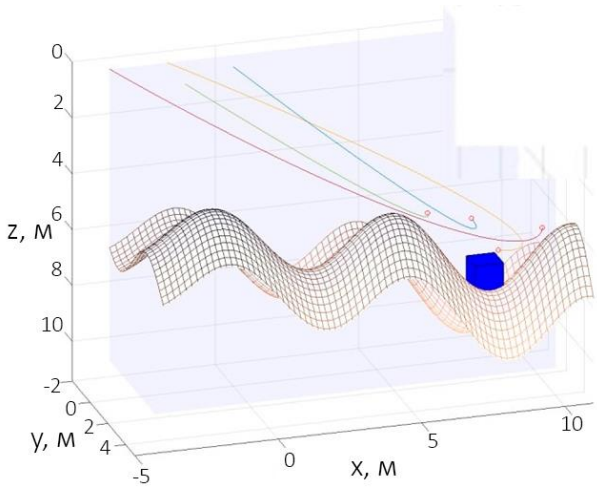


Рис.8 – Окружение объекта формацией АНПА

Заключение.

Итогом работы стал алгоритм построения траекторий для группы АНПА, который позволяет задавать желаемые условия и ограничения для кривых траекторий. Доработав этот метод, можно решить широкий спектр задач, в которых требуется генерация параметрических траекторий, удовлетворяющих множеству условий.

Библиографический список.

1. Построение на базе задачи машины Дубинса опорных траекторий движения объектов с учетом постоянных внешних воздействий // ntv.ifmo.ru URL: https://ntv.ifmo.ru/file/article/20984.pdf (дата обращения: 17.05.2025).
2. Particle Swarm Optimization (PSO) – An Overview // geeksforgeeks.org URL: https://www.geeksforgeeks.org/particle–swarm–optimization–pso–an–overview/ (дата обращения: 17.05.2025).
3. Path Planning for Multi–UAV Formation Rendezvous Based on Distributed Cooperative Particle Swarm Optimization // mdpi.com URL: https://www.mdpi.com/2076–3417/9/13/2621 (дата обращения: 17.05.2025).
4. Trajectory Planning Method for Formation Rendezvous of Underactuated Multi–

UUV Under Multiple Constraints // mdpi.com URL: https://www.mdpi.com/2077–1312/12/12/2118 (дата обращения: 17.05.2025).
5. Cooperative Path Planning of Unmanned Aerial Vehicles // onlinelibrary.wiley.com URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9780470974636 (дата обращения: 17.05.2025).
6. Intelligent UAV Map Generation and Discrete Path Planning for Search and Rescue Operations // hinawi.com URL: https://www.hindawi.com/journals/complexity/2018/6879419/ (дата обращения: 17.05.2025).
7. Comparison of four UAV georeferencing methods for environmental monitoring purposes focusing on the combined use with airborne and satellite remote sensing platforms // sciencedirect.com URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030324341830596X (дата обращения: 17.05.2025).
8. Cooperative search-attack mission planning for multi-UAV based on intelligent self-organized algorithm // sciencedirect.com URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1270963817301736 (дата обращения: 17.05.2025).
9. Multi-Agent System Theory for Modelling a Home Automation System // springer.com URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-02478-8_74 (дата обращения: 17.05.2025).
10. Timetable-based transit assignment using branch and bound techniques // sagepub.com URL: https://journals.sagepub.com/doi/10.3141/1752-14 (дата обращения: 17.05.2025).

[1]Токарев Денис Александрович, канд. техн. наук, Tdanis@yandex.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

[2]Кудряшов Арсений Валерьевич, monsterkakes@gmail.com, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

[3]Дементьев Кирилл Валерьевич, mash.saigon.89@gmail.com, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

Tokarev Denis, Tdanis@yandex.ru, Candidate of Technical Sciences, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

Kudryashov Arseniy, monsterkakes@gmail.com, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

Dementiev Kirill, mash.saigon.89@gmail.com, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

УДК 519.87:004.94

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ТРАЕКТОРИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ КИБЕРФИЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЗАМЕНОЙ ЭЛЕМЕНТА ПРИ КОНТРОЛЕ

Заморёнов М.В.[1], Заморёнов И.М.[2], Малицкая А.А.[3], Шевченко В.И.[4]

USING THE TRAJECTORY METHOD IN MODELING A CYBER-PHYSICAL SYSTEM WITH ELEMENT REPLACEMENT DURING ITS MONITORING

Zamoryonov M.V.[1], Zamoryonov I.M.[2], Malitskaya A.A.[3], Shevchenko V.I.[4]

Аннотация. *Решена задача анализа надёжности и эффективности функционирования киберфизической системы, в которой осуществляется контроль и замена элементов в процессе эксплуатации. В качестве математического инструментария выбран аппарат полумарковских процессов. Использован оригинальный метод укрупнения модели, особенностью которого является отсутствие необходимости в предварительном определении стационарного распределения вложенной цепи Маркова. Определены ключевые характеристики: переходные вероятности, стационарное распределение. Для анализа системы применен метод траекторий, на основе которого построена функция распределения времени безотказной работы системы. Проведено сравнение результатов моделирования с теоретическими оценками, полученными с использованием теоремы о среднестатистическом времени пребывания в подмножестве состояний. Представлен итоговый аналитический вид искомой функции распределения, что демонстрирует применимость и эффективность оценки надёжности сложных технических систем.*

Abstract. *The paper addresses the problem of analyzing the reliability and efficiency of a cyber-physical system that undergoes monitoring and component replacement during operation. The mathematical framework is based on the theory of semi-Markov processes. An original model aggregation method is employed, with the key feature being the elimination of the need for a preliminary determination of the stationary distribution of the embedded Markov chain. Key characteristics such as transition probabilities and the stationary distribution are defined. For system analysis, the trajectory method is applied, which is used to construct the distribution function of the system's uptime. A comparison is made between the simulation results and theoretical estimates obtained using the theorem on the mean time spent in a subset of states. The paper presents the final analytical form of the desired distribution function, demonstrating the applicability and effectiveness of the proposed approach for assessing the reliability of complex technical systems.*

Ключевые слова. *Полумарковская система, киберфизическая система, функция распределения, метод траекторий, контроль и замена элемента.*

Keywords. *Semi-Markov system, cyber-physical system, distribution function, trajectory method, monitoring, element replacement.*

Введение.

Обеспечение бесперебойной и устойчивой работы систем искусственного интеллекта в современном производстве — задача, имеющая не только техническое, но и стратегическое значение для любого предприятия. Эффективное решение этой комплексной задачи строится на многоуровневом подходе, который включает в себя не только постоянный мониторинг и дообучение самих интеллектуальных алгоритмов, но и, что не менее важно, плановое обновление, замену и модернизацию аппаратных компонентов и инфраструктурных решений, не связанных непосредственно с ИИ.

Производственная среда характеризуется высокой интенсивностью эксплуатации оборудования, воздействием агрессивных факторов и постоянным технологическим развитием. В таких условиях даже самые совершенные ИИ-модели не смогут демонстрировать заявленную точность и надёжность, если они работают на устаревшей, изношенной или несовместимой аппаратной базе. Ключевым элементом стратегии обеспечения надёжности становится внедрение системы превентивного технического обслуживания и модернизации. Это подразумевает регулярную диагностику состояния промышленных контроллеров, исполнительных механизмов, кабельных линий, источников бесперебойного питания и других элементов, их своевременную замену до наступления критического отказа.

Для формализации, анализа и количественной оценки рисков, связанных с надёжностью такой сложной архитектуры, в промышленной инженерии успешно применяется математический аппарат полумарковских процессов.

Надёжность всей киберфизической системы напрямую зависит от проактивного и системного управления аппаратной базой. Своевременная замена датчиков с дрейфующими характеристиками, обновление контроллеров с ограниченной вычислительной мощностью для обработки возросших потоков данных и модернизация каналов связи для минимизации задержек создают прочный, стабильный и предсказуемый фундамент, на котором возможно построение эффективной, надёжной и экономически целесообразной экосистемы промышленного искусственного интеллекта [1-6].

В данной статье предлагается с использованием аппарата полумарковских процессов рассмотреть процесс функционирования киберфизической системы с заменой элемента при её контроле.

Необходимо отметить, что полумарковская модель подобной системы уже известна [7]. Основной **целью данной работы** является апробация метода траекторий применительно к данной задаче.

Математическая модель.

Для удобства приведем граф состояний киберфизической системы с заменой элемента при её контроле (Рис.1). Первый этап моделирования, а именно определение функций распределения (ФР) времен пребывания в состояниях системы, вероятностей переходов и стационарного распределения вложенной цепи Мароква, аналогичен [7], поэтому здесь не приводится.

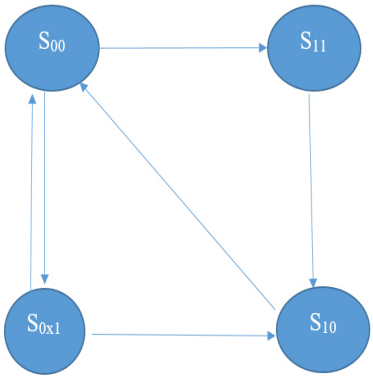


Рис.1 – Граф состояний системы

Разделим состояния системы на два подмножества (работоспособных E_+ и неработоспособных E_-) состояний:

$$E_+ = \{00, 0x1\},\ E_- = \{10, 11\},\ E = E_+ \cap E_-,$$

где $E = \{00, 0x1, 10, 11\}$ – все множество состояний системы.

Для определения ФР времен пребывания системы в подмножествах E_+ и E_- воспользуемся методом траекторий [7-10], разработанным авторами.

Используя метод траекторий, определим все траектории перехода системы из подмножества E_+ в подмножество E_-, их вероятности и времена пребывания системы на этих траекториях.

Траектории перехода системы из подмножества E_+:

$$\mathrm{T}_1 : S_{00}S_{11};\ \mathrm{T}_2 : S_{00}S_{0x1}S_{10};\ \mathrm{T}_3 : S_{00}S_{0x1}S_{11};$$

Вероятности траекторий перехода системы из подмножества E_+:

$$\mathrm{Pt}_1 = P_{00}^{11};\ \mathrm{Pt}_2 = P_{00}^{0x1}P_{0x1}^{10};\ \mathrm{Pt}_3 = P_{00}^{0x1}P_{0x1}^{00};$$

Определим времена пребывания системы в состояниях с учетом повторных попаданий, для чего определим вероятности включения состояний в траектории:

$$\mathrm{P}_S^{00} = Pt_1 + Pt_2 + Pt_3;\ \mathrm{P}_S^{0x1} = Pt_2 + Pt_3.$$

Найдены коэффициенты увеличения времени пребывания системы в состояниях за счет повторных попаданий:

$$\mathrm{c}_{00} = \frac{\frac{\rho_{00}}{\mathrm{P}_S^{00}}}{\rho_{11}};\ \mathrm{c}_{10x} = \frac{\frac{\rho_{0x1}}{\mathrm{P}_S^{0x1}}}{\rho_{11}}.$$

Плотности распределения времен пребывания системы в состояниях за счет повторных попаданий (в области изображений по Лапласу) имеют вид:

$$\hat{f}_{00}^{\theta}(s) = \frac{\hat{f}_{00}(s)}{c_{00} - (c_{00} - 1)\hat{f}_{00}(s)};\ \hat{f}_{0x1}^{\theta}(s) = \frac{\hat{f}_{0x1}(s)}{c_{0x1} - (c_{0x1} - 1)\hat{f}_{0x1}(s)},$$

где $\hat{f}_n(s)$ – изображение плотности распределения $f_n(t)$ времени пребывания системы в состоянии n.

Плотности распределения времен пребывания системы на траекториях:

$$f_T^1(t) = f_{00}^{\theta}(t);\ f_T^2(t) = f_{00}^{\theta}(t) * f_{0x1}^{\theta}(t);\ f_T^3(t) = f_{00}^{\theta}(t) * f_{0x1}^{\theta}(t);$$

где $*$ – знак операции свертки.

Плотность распределения времени пребывания системы в подмножестве E_+ найдена как взвешенная сумма плотностей распределения времен пребывания системы на траекториях, причем коэффициентами взвеси служат вероятности реализации этих путей:

$$f_+(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P_T^i} \cdot f_T^i(t).$$

Пример моделирования системы.

Исходными данными для моделирования служат функции распределения $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$ по закону Эрланга 2-го порядка с параметрами:

$$\lambda 11 = 2\ \text{ч}^{-1},\ \lambda 12 = 0.05\ \text{ч}^{-1};\ \lambda 21 = 1\ \text{ч}^{-1},\ \lambda 22 = 0.2\ \text{ч}^{-1};\ \lambda 31 = 1\ \text{ч}^{-1},$$
$$\lambda 32 = 0.5\ \text{ч}^{-1};\ \beta 11 = 0.5\ \text{ч}^{-1},\ \beta 12 = 0.4\ \text{ч}^{-1};\ \beta 21 = 0.5\ \text{ч}^{-1},\ \beta 22 = 0.1\ \text{ч}^{-1}.$$

На Рис.2 приводится функция распределения $F_+(t)$ и плотность распределения $f_+(t)$ времени пребывания системы в подмножестве E_+.

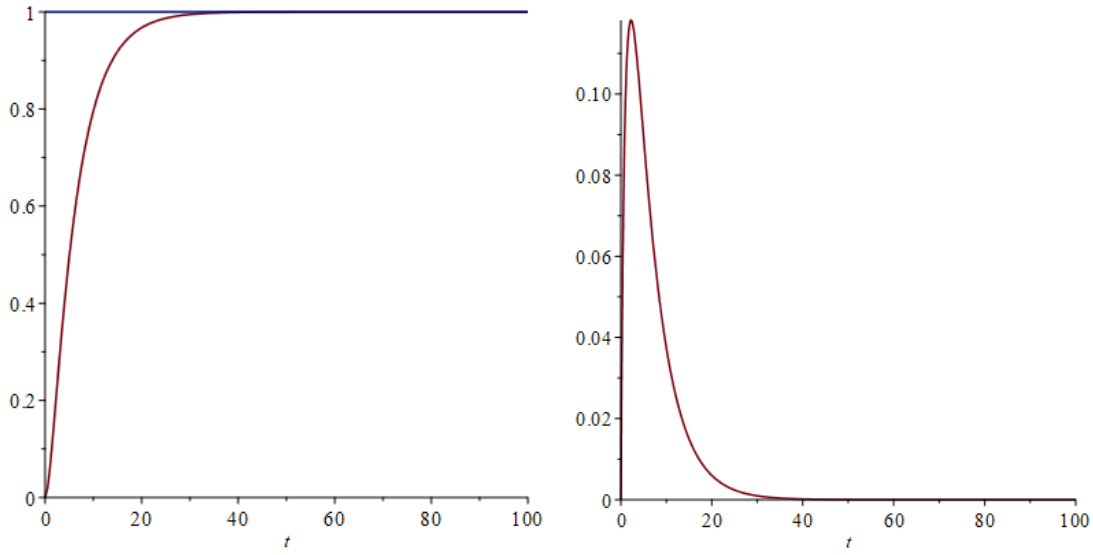


Рис.2 – Вид ФР и ПР времени пребывания системы в подмножестве E_+

Для подтверждения правильности результатов сравним значения математического ожидания полученной нами функции и математического ожидания, определяемого на основании теоремы о среднем стационарном времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний [10]:

$$T_+ = \frac{\sum_{i \in E_+} m_i \rho_i}{\sum_{k \in K \subset E_+} \sum_{i \in E_-} P_{kj} \rho_i}. \qquad (1)$$

Математические ожидания:
– по полученной ФР – 6,616932165 (ч),
– на основании формулы (1) – 6,616933618 (ч).

Заключение.

Проведенное сравнение математических ожиданий времен пребывания в подмножестве работоспособных состояний, полученных на основании найденной в работе функции распределения и на основании теоремы о среднем стационарном времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний, показало правильность полученных результатов.

В дальнейших исследованиях предполагается более детальное рассмотрение производственных систем с искусственным интеллектом.

Библиографический список.

1. Байхельт Ф. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход / Ф. Байхельт, П. Франкен. – М. : Радио и связь, 1988. – 392 с.
2. Барзилович Е.Ю. Модели технического обслуживания сложных систем : учебное пособие / Е.Ю. Барзилович. – М. : Высш. шк., 1982. – 231 с.
3. Королюк В.С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. – Киев : Наукова думка, 1982. – 236 с.
4. Королюк В.С. Стохастические модели систем / В.С. Королюк. – Отв. ред. А.Ф. Турбин. – Киев : Наукова думка, 1989. – 208 с.
5. Королюк В.С. Суперпозиция процессов марковского восстановления / В.С. Королюк // Кибернетика. – 1981. – №4. – С. 121-124.
6. Королюк В.С. Полумарковские процессы и их приложения / В.С. Королюк, А.Ф. Турбие. – К. : Наук. Думка, 1976. – 181 с.
7. Заморёнов М.В. Моделирование системы с заменой элемента при её контроле / М.В. Заморёнов, Н.И. Чаленков, В.Я. Копп // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2024. – № 2. – С. 83-87.
8. Заморёнов М.В. Моделирование процесса функционирования облачной системы хранения данных методом траекторий / М.В. Заморёнов, В.Я. Копп, Д.В. Заморёнова [и др.] // Автоматизация и измерения в машино-приборостроении. – 2020. – № 1(9). – С. 28-39.
9. Копп В.Я. Исследование функционирования однокомпонентной системы с учетом календарной профилактики / В.Я. Копп, П.Н. Флоря, М.В. Заморёнов // Автоматизация и измерения в машино- приборостроении. – 2020. – № 4(12). – С. 33-42.
10. Заморёнов М.В. Моделирование полумарковской системы с учетом непростого потока восстановления / М.В. Заморёнов, В.Я. Копп, Н.И. Чаленков // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2023. – № 3. – С. 112-119.

[1]Михаил Вадимович Заморёнов, канд. техн. наук, доц., доцент, zamoryonoff@gmail.com, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

[2]Заморёнов Илья Михаилович, ассистент, ilia.zamoryonov@gmail.com, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

[3]Малицкая Александра Александровна, старший преподаватель,

malitskaya@sevsu.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

[4]Шевченко Виктория Игоревна, канд. техн. наук, доц., зав. кафедрой, vishevchenko@mail.sevsu.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

Zamoryonov Mikhail Vadimovich, Candidate of Technical Sciences, Docent, Associate Professor, zamoryonoff@gmail.com, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

Zamoryonov Ilia Mikhailovich, Assistant, ilia.zamoryonov@gmail.com, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

Malitskaya Alexandra Aleksandrovna, Senior Lecturer, malitskaya@mail.sevsu.ru, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

Shevchenko Viktoria Igorevna, Candidate of Technical Sciences, Docent, Head of the Department, vishevchenko@mail.sevsu.ru, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

УДК 004:519.854

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ СОСТАВОВ ПАРТИЙ ДЕТАЛЕЙ И ПОРЯДКОВ ИХ ОБРАБОТКИ В КОНВЕЙЕРНЫХ СИСТЕМАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Кротов К.В.[1]

MATHEMATICAL MODELS OF COMPOSITION OPTIMIZATION BATCHES OF PARTS AND THEIR PROCESSING PROCEDURES IN CONVEYOR SYSTEMS USING INTEGER LINEAR PROGRAMMING

Krotov K.V.[1]

Аннотация. *Автоматизированное управление процессами выпуска деталей разных типов в производственных конвейерных системах предусматривает формирование из них партий и построение расписаний их обработки. Детали, включаемые в партии, обрабатываются на устройствах этих систем последовательно. Оптимизация составов партий и порядков их обработки на устройствах возможна с использованием целочисленного программирования. Современные модели целочисленного программирования позволяют распределять детали по партиям для их параллельной обработки на устройствах. Способ перемещения партий между устройствами в этих моделях предполагает их передачу при завершении обработки всех деталей в них. Альтернативный способ перемещения деталей из партий между двумя устройствами предполагает их передачу в момент времени завершения обработки каждой детали на предшествующем устройстве. В связи с этим выполнена разработка моделей целочисленного программирования оптимизации рассматриваемых решений. Первоначально получены две нелинейные модели, которые затем линеаризованы. Верификация моделей осуществлена в программе IBM ILOG CPLEX. Результаты исследований показали эффективность моделей при решении рассматриваемых задач и рост производительности обработки деталей при включении их в партии.*

Abstract. *Automated control of the processes of producing parts of different types in production conveyor systems provides for the formation of batches from them and the construction of schedules for their processing. The parts included in the batch are processed sequentially on the devices of these systems. Optimization of batch compositions and processing procedures on devices is possible using integer programming. Modern integer programming models allow parts to be distributed in batches for parallel processing on devices. The method of moving batches between devices in these models involves transferring them when processing all the parts in them is completed. An alternative way to move parts from batches between two devices involves transferring them at the time each part is processed on the previous device. In this regard, the development of integer programming models for optimizing the solutions under consideration has been carried out. Initially, two non-linear models were obtained, which were then*

linearized. The verification of the models was carried out in the IBM ILOG CPLEX program. The research results have shown the effectiveness of the models in solving the tasks under consideration and an increase in the productivity of processing parts when they are included in batches.

Ключевые слова. *Конвейерные системы, партии деталей, расписания, модели смешанного целочисленного линейного программирования.*

Keywords. *Conveyor systems, batches of parts, schedules, mixed integer linear programming models.*

Введение.

В обрабатывающих конвейерных системах, к которым в промышленности относятся системы многономенклатурного производства, требуется обработка деталей разных типов. Под конвейерной системой подразумевается система, представляющая собой последовательность обрабатывающих устройств, каждое из которых реализует операции с деталями. Для каждого типа деталей предусмотрен определенный технологический процесс, характеризуемый длительностями их обработки на каждом из обрабатывающих устройств, а также длительностью переналадок этих устройств на их обработку. К одному типу относятся детали, имеющие равное время обработки на устройствах КС и равное время переналадок этих устройств на реализацию операций с ними.

Управление указанными процессами предусматривает оптимизацию решений по составам партий деталей (ПД), а также порядков их обработки в КС. Различают два подхода к оптимизации составов партий. Первый предусматривает определение количества деталей каждого типа в партиях. В соответствии с этим подходом вычисление временных характеристик процесса обработки деталей в КС реализуется при учете, что между устройствами партии передаются целиком (передача ПД с предшествующего устройства на последующее осуществляется после окончания обработки всех деталей в них). Этот подход использован автором в [1] при построении моделей целочисленного программирования для оптимизации количества деталей в партиях и расписаний их обработки в КС. В соответствии со вторым подходом вычисление характеристик процессов обработки деталей, включенных в партии, осуществляется при учете того, что детали передаются между двумя устройствами сразу при окончании операций с ними на предшествующем устройстве. При малых размерах задач возможно использование аппарата Mixed Integer Linear Programming (MILP) и поиск решений в программах– решателях задач дискретной оптимизации.

Разработке моделей для систем с одним прибором, реализующих последовательную либо параллельную обработку ПД, посвящены работы [2-5]. В этих работах оптимизация составов ПД для выполнения на одном устройстве осуществляется с учетом директивных сроков, а оптимизация распределения деталей по партиям и их порядка для реализации действий с ними на устройстве с параллельно функционирующими приборами (Batch Proccesing Machine (BPM)) обеспечивает минимизацию общей длительности их обработки. Работы [6-9] посвящены разработке полиномиальных алгоритмов оптимизации составов партий для их обработки на одном устройстве. Модели MILP в [10-13] позволяют оптимизировать решения по включению деталей в партии при их обработке в системах с BPM, включенными последовательно. Модели MILP в

[14-18] позволяют оптимизировать составы ПД для операций с ними на устройствах последовательной обработки (Job Proccesing Machine (JPM)) и составы партий для операций с ними на устройствах параллельной обработки (с BPM). В них оптимизация ПД осуществляется для систем смешанного типа.

Анализ показал, что не реализовано построение моделей MILP, позволяющих оптимизировать составы ПД и их порядок для последовательной обработки на устройствах КС (осуществляющих последовательное пакетирование деталей для обработки в системах с JPM). В моделях не реализовано определение характеристик процессов обработки с учетом способа передачи между приборами отдельных деталей, включенных в партии, в моменты времени окончания операций с ними.

Постановка задачи предусматривает, что:

1) система конвейерная;

2) типизация деталей осуществлена в соответствии с равным временем их обработки на устройствах КС и временем переналадки устройств;

3) обработка в партиях;

4) перемещение деталей между двумя приборами – в моменты времени окончания их обработки на первом из приборов.

Цель работы состоит в построении моделей MILP оптимизации решений по включению деталей в партии и по порядкам партий для их последовательной обработки на устройствах КС, разработке приложения в среде IBM ILOG CPLEX, в сравнении эффективности моделей.

Математические модели оптимизации решений по составам партий деталей и их порядкам для обработки в КС.

Рассуждения строятся с учетом обозначения для последовательностей ПД при их обработке на устройствах КС, имеющего вид π^l ($l=\overline{1,L}$). Для построения модели первого вида оптимизации рассматриваемых решений введены обозначения индексов: k – номер позиции партии в последовательностях π^l их обработки на устройствах КС; j – номер детали, под которым она включена в партию; w – тип деталей, обрабатываемых на устройствах КС. Обозначения для параметров системы и обрабатываемых партий: L – количество обрабатывающих устройств; K – количество позиций, которые занимают ПД в последовательностях π^l; J – количество деталей в каждой партии; W– количество типов деталей; n^w – количество деталей w-го типа. Параметры обработки: t_{lw} – время обработки детали w-го типа на l-м устройстве; p_{lw} – длительность наладки l-го устройства на обработку деталей w-го типа. Через M обозначено некоторое большое число.

Для модели первого вида введены обозначения переменных решения: $x_{jk}=1$, если деталь включена под номером j в партию, занимающую k-ю позицию в последовательностях π^l; $y_{kw}=1$, если в партию, занимающую k-ю позицию в последовательностях π^l, включены детали w-го типа; q^l_{jk} – момент времени начала обработки на l-м устройстве детали, включенной под номером j в партию, занимающую k-ю позицию в последовательности π^l; g_{lk} – момент времени окончания обработки на l-м устройстве ПД в k-й позиции в π^l; $C_{\max}$ – времени окончания обработки всех ПД в КС. При построении модели учтено, что порядок обработки партий на устройствах одинаков, количество деталей в партиях не менее 2.

Для (j=1)-й детали в партии, занимающей (k=1)-ю позицию в последовательности π^1 на (l=1)-м приборе, значение q_{11}^1 определяется выражением $q_{11}^1 \geq \sum_{w=1}^{W} p_{1w} y_{w1}$, вычисляющим момент времени окончания его наладки. Для деталей с номером j>1 в этой партию, значения q_{j1}^1 определяются выражением: $q_{j1}^1 \geq q_{j\text{-}1,1}^1 + \sum_{w=1}^{W} t_{1w} y_{w1} - M \cdot (1 - x_{j1}),$ где $j = \overline{2,J}$. Выражение $\sum_{w=1}^{W} t_{1w} y_{w1}$ позволяет определить время обработки (j-1)-й детали в партии, а выражение $M \cdot (1 - x_{j1})$ обеспечивает вычисление q_{j1}^1 только в случае, если деталь включена в партию (при $x_{j1} = 1$). Момент времени g_{11} окончания обработки партии, занимающей (k=1)-ю позицию в π^1 – это максимум среди значений $q_{j,1}^1 + \sum_{w=1}^{W} t_{1w} y_{w1}$, определяемый выражением: $g_{11} \geq q_{j,1}^1 + \sum_{w=1}^{W} t_{1w} y_{w1} - M \cdot (1 - x_{j1}),$ где $j = \overline{1,J}$ (максимум среди моментов времени окончания обработки деталей в партии). На его основе получено выражение для определения значений g_{1k} моментов времени окончания обработки на (l=1)-м устройстве ПД, занимающих в π^1 k-е позиции:

$$g_{1k} \geq q_{j,k}^1 + \sum_{w=1}^{W} t_{1w} y_{wk} - M \cdot (1 - x_{jk}), \quad (1)$$

где $k = \overline{1,K}; j = \overline{1,J}$ (максимум среди значений $q_{j,k}^1 + \sum_{w=1}^{W} t_{1w} y_{wk}$ для деталей в k-й партии). Момент времени q_{1k}^1 начала обработки на (l=1)-м устройстве детали с (j=1)-м номером в партии, занимающей k-ю позицию в последовательности π^1, вычисляется выражением:

$$q_{1k}^1 \geq g_{1,k-1} + \sum_{w=1}^{W} p_{1w} y_{wk}, \quad (2)$$

где $k = \overline{2,K}$. Выражение $g_{1,k-1} + \sum_{w=1}^{W} p_{1w} y_{wk}$ определяет момент времени окончания наладки (l=1)-го устройства на обработку деталей в k-й партии после окончания операций с (k-1)-й партией. Выражение для вычисления значений q_{jk}^1 для деталей, включенных под номером j>1 в партиях в k-х позициях ($k \geq 1$) в последовательности π^1, имеет вид:

$$q_{jk}^1 \geq q_{j\text{-}1,k}^1 + \sum_{w=1}^{W} t_{1w} y_{wk} - M \cdot (1 - x_{jk}), \quad (3)$$

где $k = \overline{1,K}; j = \overline{2,J}$. Для ($j$=1)-го задания в пакете в (k=1)-й позиции в последовательностях π^l ($l = \overline{2,L}$) значения q_{11}^l определяются выражением:

$$q_{11}^{l} \geq \max(q_{11}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} t_{l\text{-}1,w} y_{w1}; \sum_{w=1}^{W} p_{lw} y_{w1}),$$

где $l = \overline{2,L}$. Операция max определяет наибольшее значение среди моментов времени окончания обработки (j=1)-й детали в (k=1)-й партии на (l-1)-м устройстве и окончания наладки l-го устройства на обработку деталей в (k=1)-й партии. Момент времени q_{j1}^{l} начала обработки детали с номером j>1 в (k=1)-й партии в π^{l} ($l = \overline{2,L}$) определяется выражением:

$$q_{j1}^{l} \geq \max(q_{j1}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} t_{l\text{-}1,w} y_{w1}; q_{j\text{-}1,1}^{l} + \sum_{w=1}^{W} t_{lw} y_{w1}) - M \cdot (1 - x_{j1}), \qquad (4)$$

где $l = \overline{2,L};\ j = \overline{2,J}$ (вычисления выполняются только для деталей, включенных в эту партию, при $x_{j1} = 1$). Операция max определяет наибольшее значение среди моментов времени окончания обработки j-й детали в (k=1)-й партии на (l-1)-м устройстве и окончания обработки (j-1)-й детали из этой же партии на l-м устройстве. На основе (1) сформировано выражение, позволяющее определить значения g_{lk} моментов времени окончания обработки на l-х устройствах ПД в k-х позициях в π^{l}:

$$g_{lk} \geq q_{jk}^{l} + \sum_{w=1}^{W} t_{lw} y_{wk} - M \cdot (1 - x_{jk}), \qquad (5)$$

при $l = \overline{1,L};\ k = \overline{1,K};\ j = \overline{1,J}.$ С учетом (2), (3) получено выражение для q_{1k}^{l}:

$$q_{1k}^{l} \geq \max(q_{1k}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} t_{l\text{-}1,w} y_{wk}; g_{l,k\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} p_{lw} y_{wk}) - M \cdot (1 - x_{1k}),$$

где $l = \overline{2,L};\ k = \overline{2,K}$. На основе (4) сформировано выражение, определяющее значения q_{jk}^{l} для деталей, включенных под номерами j>1 в партии, занимающие k-е позиции в последовательностях π^{l} ($l = \overline{2,L}$), имеющее вид:

$$q_{jk}^{l} \geq \max(q_{jk}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} t_{l\text{-}1,w} y_{wk};\ \ q_{j\text{-}1,k}^{l} + \sum_{w=1}^{W} t_{lw} y_{wk}) - M \cdot (1 - x_{jk}), \qquad (6)$$

где $l = \overline{2,L};\ j = \overline{2,J}$. Время окончания обработки партий – это максимум среди моментов времени окончания операций с ними на L-м устройстве:

$$C_{\max} \geq g_{Lk}, \text{ где } k = \overline{1,K}.$$

Ограничения группирования деталей в партии:

1) в партию должно быть включено не менее двух деталей:

$$\sum_{j=1}^{J} x_{kj} \geq 2, \text{где } k = \overline{1,K};$$

2) в k-й позиции в π^l может находиться только одна партия:

$$\sum_{w=1}^{W} y_{wk} = 1, \text{ где } k = \overline{1,K};$$

3) в соседних позициях в π^l находятся партии деталей разных типов:

$$y_{wk} + y_{w,k+1} \le 1, \text{ где } w = \overline{1,W}, k = \overline{1,K\text{-}1}.$$

Для формирования ограничений на множество составов ПД использован подход, основывающийся на логических условиях. Логическое условие имеет вид: если деталь включена под (j+1)-м номером в партию, занимающую k-ю позицию в π^l ($x_{j+1,k} = 1$), то в партию требуется включить деталь под j-м номером ($x_{j,k} = 1$). Вид условия: ЕСЛИ $x_{j+1,k} = 1$, ТО $x_{j,k} = 1$ ($j = \overline{1,J\text{-}1}; k = \overline{1,K}$). Вид ограничения: $x_{jk} - x_{j+1,k} \ge 0$ ($j = \overline{1,J\text{-}1}; k = \overline{1,K}$).

Для группирования в партии всех деталей w-х типов в количестве n^w введены индикаторные переменные v_{kj}^w ($w = \overline{1,W}; k = \overline{1,K}; j = \overline{1,J}$): $v_{kj}^w = 1$, если $y_{wk} x_{jk} = 1$ (j-я деталь в партии, занимающей k-ю позицию в π^l, относится к w-му типу); $v_{kj}^w = 0$, если $y_{wk} x_{jk} = 0$. Ограничения для условий $v_{kj}^w = 1$, когда $y_{wk} x_{jk} = 1$, $v_{kj}^w = 0$, когда $y_{wk} x_{jk} = 0$, получены в виде:

$y_{wk} x_{jk} \ge 1 - M \cdot (1 - v_{kj}^w)$; $y_{wk} x_{jk} \le M v_{kj}^w$, где $w = \overline{1,W}, k = \overline{1,K}, i = \overline{1,I}$.

Ограничение для включения в партии всех деталей каждого типа:

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{J} v_{kj}^w = n^w, \text{ где } w = \overline{1,W}.$$

Модель первого вида оптимизации составов ПД и расписаний их обработки на устройствах КС имеет следующую форму:

1) целевая функция:

$$min\ C_{max}; \tag{7}$$

2) ограничения:

$$\sum_{j=1}^{J} x_{jk} \ge 2,\ k = \overline{1,K}; \tag{8}$$

$$\sum_{w=1}^{W} y_{wk} = 1,\ k = \overline{1,K}; \tag{9}$$

$$x_{jk} - x_{j+1,k} \ge 0,\ k = \overline{1,K};\ j = \overline{1,J\text{-}1}; \tag{10}$$

$$y_{wk} x_{jk} \ge 1 - M \cdot (1 - v_{kj}^w),\ y_{wk} x_{jk} \le M v_{kj}^w,\ w = \overline{1,W}, k = \overline{1,K}, j = \overline{1,J}; \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{J} v_{kj}^w = n^w,\ w = \overline{1,W}; \tag{12}$$

$$y_{wk} + y_{w,k+1} \le 1;\ w = \overline{1,W}, k = \overline{1,K\text{-}1}; \tag{13}$$

$$q_{11}^1 \ge \sum_{w=1}^{W} p_{1w} y_{w1}; \tag{14}$$

$$q_{jk}^{1} \geq q_{j\text{-}1,k}^{1} + \sum_{w=1}^{W} t_{1w} y_{wk} - M \cdot (1 - x_{jk}),\ k = \overline{1,K};\ j = \overline{2,J}; \quad (15)$$

$$g_{lk} \geq q_{jk}^{l} + \sum_{w=1}^{W} t_{lw} y_{wk} - M \cdot (1 - x_{jk}),\ l = \overline{1,L};\ k = \overline{1,K};\ j = \overline{1,J}; \quad (16)$$

$$q_{1k}^{1} \geq g_{1,k-1} + \sum_{w=1}^{W} p_{1w} y_{wk},\ k = \overline{2,K}; \quad (17)$$

$$q_{11}^{l} \geq \max(q_{11}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} t_{l\text{-}1,w} y_{w1};\ \sum_{w=1}^{W} p_{lw} y_{w1}),\ l = \overline{2,L}; \quad (18)$$

$$q_{1k}^{l} \geq \max(q_{1k}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} t_{l\text{-}1,w} y_{wk};\ g_{l,k\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} p_{lw} y_{wk}) - M \cdot (1 - x_{1k}),\ l = \overline{2,L};\ k = \overline{2,K}; \quad (19)$$

$$q_{jk}^{l} \geq \max(q_{jk}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} t_{l\text{-}1,w} y_{wk};\ q_{j\text{-}1,k}^{l} + \sum_{w=1}^{W} t_{lw} y_{wk}) - M \cdot (1 - x_{jk});\ l = \overline{2,L};\ k = \overline{1,K};\ j = \overline{2,J}; \quad (20)$$

$$C_{\max} \geq g_{Lk},\ k = \overline{1,K}; \quad (21)$$

$$q_{jk}^{l} \geq 0;\ g_{lk} \geq 0;\ l = \overline{1,L};\ k = \overline{1,K};\ j = \overline{1,I}; \quad (22)$$

$$x_{jk} \in \{0,1\};\ y_{kw} \in \{0,1\};\ v_{kj}^{w} \in \{0,1\};\ k = \overline{1,K};\ j = \overline{1,J};\ w = \overline{1,W}. \quad (23)$$

При построении модели второго вида использованы введенные выше и дополнительные обозначения: r_w – номер ПД w-го типа, обрабатываемой в КС, R_w – количество ПД w-го типа. Обозначения для переменных решения: $x_{j,r_w}^{w} = 1$, если деталь включена под номером j в партию деталей w-го типа, имеющей номер r_w,; $y_{r_w,k}^{w} = 1$, если r_w-я партия находится в k-й позиции в последовательностях π^l их выполнения на устройствах КС.

Для (j=1)-й детали в (k=1)-й партии в последовательности π^1 на (l=1)-м устройстве значение q_{11}^{1} определяется выражением: $q_{11}^{1} \geq \sum_{w=1}^{\mathrm{W}} \sum_{r_w=1}^{R_w} p_{1w} y_{r_w,1}^{w}$. Для детали с j>1 в партии, занимающей (k=1)-ю позицию в π^1, значение $q_{j,1}^{1}$ определяется выражением:

$$q_{j,1}^{1} \geq q_{j\text{-}1,1}^{1} + \sum_{w=1}^{W} \sum_{r_w=1}^{R_w} t_{1w} y_{r_w,1}^{w} - M \cdot (1 - \sum_{w=1}^{W} \sum_{r_w=1}^{R_w} y_{r_w,1}^{w} x_{j,r_w}^{w}),$$

где $j = \overline{2,J}$. Выражение для определения значений g_{lk} моментов времени окончания обработки на l-х приборах ПД, занимающих в π^l k-е позиции:

$$g_{lk} \geq q_{j,k}^{l} + \sum_{w=1}^{W} \sum_{r_w=1}^{R_w} t_{lw} y_{r_w,k}^{w} - M \cdot (1 - \sum_{w=1}^{W} \sum_{r_w=1}^{R_w} y_{r_w,k}^{w} x_{j,r_w}^{w}),$$

где $l = \overline{1,L};\ k = \overline{1,K};\ j = \overline{1,J}$. Выражение $\sum_{w=1}^{W} \sum_{r_w=1}^{R_w} y_{r_w,k}^{w} x_{j,r_w}^{w} = 1$ характеризует включение детали под номером j в r_w-ю партию w-го типа, которая занимает k-ю позицию в последовательностях π^l их обработки на устройствах КС. Момент

времени q_{1k}^{1} начала обработки на (l=1)-м устройстве (j=1)-й детали в k-й партии в последовательности π^{1} определяется выражением:

$$q_{1,k}^{1} \geq g_{1,k\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} p_{1w} y_{r_w,k}^{w} - M \cdot (1 - \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} y_{r_w,k}^{w} x_{1,r_w}^{w}),$$

где $k = \overline{2,K}$. Выражение для определения значения q_{jk}^{1} для деталей с j>1 в партии, занимающей k-ю позицию ($k \geq 1$) в последовательности π^{1}:

$$q_{j,k}^{1} \geq q_{j\text{-}1,k}^{1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{1w} y_{r_w,k}^{w} - M \cdot (1 - \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} y_{r_w,k}^{w} x_{j,r_w}^{w}),$$

где $k = \overline{1,K}; j = \overline{2,J}$. Значение q_{11}^{l} для (j=1)-й детали, включенной в (k=1)-ю партию в последовательностях π^{l}, определяется выражением:

$$q_{11}^{l} \geq \max(q_{11}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{l\text{-}1w} y_{r_w,1}^{w}; \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} p_{lw} y_{r_w,1}^{w}),$$

где $l = \overline{2,L}$. Момент времени q_{j1}^{l} начала обработки детали с номером j>2 в (k=1)-й партии в последовательностях π^{l} определяется выражения вида:

$$q_{j1}^{l} \geq \max(q_{j1}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{l\text{-}1,w} y_{r_w,1}^{w}; q_{j\text{-}1,1}^{l} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{lw} y_{r_w,1}^{w}) - M \cdot (1 - \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} y_{r_w,1}^{w} x_{j,r_w}^{w}),$$

где $l = \overline{2,L};\ j = \overline{2,J}$. Выражение для вычисления значений $q_{1,k}^{l}$ для (j=1)-х деталей в пакетах, занимающих k -е позиции в последовательностях π^{l}:

$$q_{1,k}^{l} \geq \max(q_{1,k}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{l\text{-}1,w} y_{r_w,k}^{w}; g_{l,k\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} p_{lw} y_{r_w,k}^{w}) - M \cdot (1 - \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} y_{r_w,k}^{w} x_{1,r_w}^{w}),$$

где $l = \overline{2,L}; k = \overline{2,K}$. Выражение для определения значений q_{jk}^{l} для заданий, входящих с номерами j>2 в пакеты, занимающие k-е позиции в π^{l}:

$$q_{jk}^{l} \geq \max(q_{jk}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{l\text{-}1,w} y_{r_w,k}^{w}; q_{j\text{-}1,k}^{l} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{lw} y_{r_w,k}^{w}) - M \cdot (1 - \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} y_{r_w,k}^{w} x_{j,r_w}^{w}),$$

где $l = \overline{2,L}; k = \overline{1,K}; j = \overline{2,J}$. Дополнительные ограничения имеют вид:

1) на количество деталей в каждой r_w-й партии w-го типа не менее 2:

$$\sum_{j=1}^{J} x_{j,r_w}^{w} \geq 2, \text{ где } w = \overline{1,W},\ r_w = \overline{1,R_w};$$

2) распределение по r_w-м партиям w-х типов всех n^{w} деталей:

$$\sum_{r_w=1}^{R_w}\sum_{j=1}^{J} x_{j,r_w}^{w} = n^{w}, \text{ где } \; w=\overline{1,W};$$

3) каждая r_w-я партия находится в одной позиции в π^l:

$$\sum_{k=1}^{K} y_{r_w,k}^{w} = 1, \text{ где } \; w=\overline{1,W}; \; r_w=\overline{1,R_w};$$

4) в последовательностях π^l k-ю позицию занимает только одна ПД:

$$\sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} y_{r_w,k}^{w} = 1, \text{ где } \; k=\overline{1,K};$$

5) в k-й и (k+1)-й позициях в π^l размещаются партий разных типов:

$$\sum_{r_w=1}^{R_w} y_{r_w,k}^{w} + \sum_{r_w=1}^{R_w} y_{r_w,k+1}^{w} \le 1, \text{ где } \; w=\overline{1,W}; \; k=\overline{1,K\text{-}1}.$$

6) ограничения предшествования для деталей в r_w-й партии:

$$x_{j,r_w}^{w} - x_{j+1,r_w}^{w} \ge 0, \text{ где } w=\overline{1,W}; r_w=\overline{1,R_w}; j=\overline{1,J\text{-}1}.$$

Модель второго вида оптимизации решений по включению деталей в партии и по последовательностям π^l их обработки в КС:

1) целевая функция:

$$min \; C_{max}; \tag{24}$$

2) ограничения:

$$\sum_{j=1}^{J} x_{j,r_w}^{w} \ge 2, \; w=\overline{1,W}, \; r_w=\overline{1,R_w}; \tag{25}$$

$$\sum_{r_w=1}^{R_w}\sum_{j=1}^{J} x_{j,r_w}^{w} = n^{w}, \; \; w=\overline{1,W}; \tag{26}$$

$$\sum_{k=1}^{K} y_{r_w,k}^{w} = 1, \; w=\overline{1,W}; \; r_w=\overline{1,R_w}; \tag{27}$$

$$\sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} y_{r_w,k}^{w} = 1, \; \; k=\overline{1,K}; \tag{28}$$

$$\sum_{r_w=1}^{R_w} y_{r_w,k}^{w} + \sum_{r_w=1}^{R_w} y_{r_w,k+1}^{w} \le 1, \; \; w=\overline{1,W}; \; k=\overline{1,K\text{-}1}; \tag{29}$$

$$x_{j,r_w}^{w} - x_{j+1,r_w}^{w} \ge 0, \; w=\overline{1,W}, \; r_w=\overline{1,R_w}, \; j=\overline{1,J\text{-}1}; \tag{30}$$

$$q_{11}^{1} \ge \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} p_{1w} y_{r_w,1}^{w}; \tag{31}$$

$$q_{j,k}^{1} \ge q_{j\text{-}1,k}^{1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{1w} y_{r_w,k}^{w} - M\cdot\left(1-\sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} y_{r_w,k}^{w} x_{j,r_w}^{w}\right), \; k=\overline{1,K}; j=\overline{2,J}; \tag{32}$$

$$g_{lk} \geq q^{l}_{j,k} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{lw} y^{w}_{r_w,k} - M\cdot(1-\sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} y^{w}_{r_w,k} x^{w}_{j,r_w}),\ l=\overline{1,L};\ k=\overline{1,K};\ j=\overline{1,J};\quad (33)$$

$$q^{1}_{1,k} \geq g_{1,k\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} p_{1w} y^{w}_{r_w,k} - M\cdot(1-\sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} y^{w}_{r_w,k} x^{w}_{1,r_w}),\ k=\overline{2,K};\quad (34)$$

$$q^{l}_{11} \geq \max(q^{l\text{-}1}_{11} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{l\text{-}1w} y^{w}_{r_w,1};\ \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} p_{lw} y^{w}_{r_w,1}) - M\cdot(1-\sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} y^{w}_{r_w,1} x^{w}_{1,r_w}),\ l=\overline{2,L};\quad (35)$$

$$q^{l}_{1,k} \geq \max(\ q^{l\text{-}1}_{1,k} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{l\text{-}1,w} y^{w}_{r_w,k};\ g_{l,k\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} p_{lw} y^{w}_{r_w,k}) - M\cdot(1-\sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} y^{w}_{r_w,k} x^{w}_{1,r_w}),\quad (36)$$

$$l=\overline{2,L};\ k=\overline{2,K};$$

$$q^{l}_{jk} \geq \max(q^{l\text{-}1}_{jk} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{l\text{-}1,w} y^{w}_{r_w,k};\ q^{l}_{j\text{-}1,k} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{lw} y^{w}_{r_w,k}) -$$

$$- M\cdot(1-\sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} y^{w}_{r_w,k} x^{w}_{j,r_w}),\quad l=\overline{2,L};\ k=\overline{1,K};\ j=\overline{2,J};\quad (37)$$

$$C_{\max} \geq g_{Lk},\ k=\overline{1,K};\quad (38)$$

$$q^{l}_{jk} \geq 0;\ g_{lk} \geq 0;\ l=\overline{1,L};\ k=\overline{1,K};\ j=\overline{1,J};\quad (39)$$

$$x^{w}_{j,r_w} \in \{0,1\};\ y^{w}_{r_w,k} \in \{0,1\};\ w=\overline{1,W};\ r_w=\overline{1,R_w};\ j=\overline{1,J};\ k=\overline{1,K}.\quad (40)$$

Линеаризация моделей оптимизации составов партий и расписаний их обработки в КС.

Модель (7)-(23) является нелинейной. Нелинейными являются выражения (11) и выражения (18)-(20) (операция max при вычислении q^{l}_{jk}). Для линеаризации (11) в рассмотрение введены переменные z_{wkj}: $z_{wkj} = y_{wk} x_{jk}$ ($w=\overline{1,W}, k=\overline{1,K}, j=\overline{1,J}$). Замена $y_{wk} x_{jk}$ на переменную z_{wkj} в (11) обеспечивается введением в модель ограничений [20]: $z_{wkj} \leq y_{wk}$; $z_{wkj} \leq x_{jk}$; $z_{wkj} \geq y_{wk} + x_{jk} - 1$; $z_{wkj} \in \{0,1\}$.

Для линеаризации (18) введены переменные m_l ($l=\overline{2,L}$): $m_l = 1$, если наладка l-го прибора на обработку деталей в (k=1)-й партии в π^{l} завершилась не позже, чем окончание обработки (j=1)-й детали из этой же партии на (l-1)-м приборе; $m_l = 0$ в противном случае. Для (19) введены переменные m^{l}_{k} ($l=\overline{2,L}, k=\overline{2,K}$): $m^{l}_{k} = 1$, если наладка l-го устройства на обработку деталей в партии, занимающей k-ю позицию в π^{l}, закончилась не позже окончания обработки (j=1)-й детали в k-й партии на (l-1)-м устройстве, $m^{l}_{k} = 0$ в противном случае. Для (20) введены переменные m^{l}_{jk} ($l=\overline{2,L}, k=\overline{1,K}, j=\overline{2,J}$): $m^{l}_{jk} = 1$, если обработка (j-1)-й детали в партии, занимающей k-ю позицию в π^{l}, завершилось не позже окончания обработки j-й детали в k-м пакете в π^{l-1} на (l-1)-м устройстве; $m^{l}_{jk} = 0$ в противном случае. Для интерпретации указанных переменных в модель первого вида введены требуемые дополнительные ограничения. В результате введения в модель (7)-(23) дополнительных

переменных и ограничений получена модель MILP первого вида, позволяющая определять оптимальные решения по пакетированию деталей и порядкам обработки партий в КС:

1) целевая функция:

$$min\ C_{max}; \tag{41}$$

2) ограничения:

$$\sum_{j=1}^{J} x_{jk} \geq 2,\ \sum_{w=1}^{W} y_{wk} = 1,\ k = \overline{1,K}; \tag{42}$$

$$x_{jk} - x_{j+1,k} \geq 0,\ k = \overline{1,K},\ j = \overline{1,J\text{-}1}; \tag{43}$$

$$z_{wkj} \geq 1 - M \cdot (1 - v_{kj}^{w}),\ z_{wkj} \leq M v_{kj}^{w},\ w = \overline{1,W},\ k = \overline{1,K},\ j = \overline{1,J}; \tag{44}$$

$$z_{wkj} \leq y_{wk},\ z_{wkj} \leq x_{jk},\ z_{wkj} \geq y_{wk} + x_{jk} - 1,\ w = \overline{1,W},\ k = \overline{1,K},\ j = \overline{1,J}; \tag{45}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{J} v_{kj}^{w} = n^{w},\ w = \overline{1,W}; \tag{46}$$

$$y_{wk} + y_{w,k+1} \leq 1,\ w = \overline{1,W},\ k = \overline{1,K\text{-}1}; \tag{47}$$

$$q_{11}^{1} \geq \sum_{w=1}^{W} p_{1w} y_{w1}; \tag{48}$$

$$q_{jk}^{1} \geq q_{j\text{-}1,k}^{1} + \sum_{w=1}^{W} t_{1w} y_{wk} - M \cdot (1 - x_{jk}),\ k = \overline{1,K},\ j = \overline{2,J}; \tag{49}$$

$$g_{lk} \geq q_{jk}^{l} + \sum_{w=1}^{W} t_{lw} y_{wk} - M \cdot (1 - x_{jk}),\ l = \overline{1,L},\ k = \overline{1,K},\ j = \overline{1,J}; \tag{50}$$

$$q_{1k}^{1} \geq g_{1,k-1} + \sum_{w=1}^{W} p_{1w} y_{wk},\ k = \overline{2,K}; \tag{51}$$

$$[\sum_{w=1}^{W} p_{lw} y_{w1} - (q_{11}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} t_{l\text{-}1,w} y_{w1})] + M m_{l} \geq 0,\ l = \overline{2,L}; \tag{52}$$

$$[(q_{11}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} t_{l\text{-}1,w} y_{w1}) - \sum_{w=1}^{W} p_{lw} y_{w1}] + M(1 - m_{l}) > 0,\ l = \overline{2,L}; \tag{53}$$

$$q_{11}^{l} \geq (q_{11}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} t_{l\text{-}1,w} y_{w1}) - M(1 - m_{l}),\ q_{11}^{l} \geq \sum_{w=1}^{W} p_{lw} y_{w1} - M m_{l},\ l = \overline{2,L}; \tag{54}$$

$$[(g_{l,k\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} p_{lw} y_{wk}) - (q_{1k}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} t_{l\text{-}1,w} y_{wk})] + M m_{k}^{l} \geq 0,\ l = \overline{2,L},\ k = \overline{2,K}; \tag{55}$$

$$[(q_{1k}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} t_{l\text{-}1,w} y_{wk}) - (g_{l,k\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} p_{lw} y_{wk})] + M(1 - m_{k}^{l}) > 0,\ l = \overline{2,L},\ k = \overline{2,K}; \tag{56}$$

$$q_{1k}^{l} \geq (q_{1k}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} t_{l\text{-}1,w} y_{wk}) - M(2 - x_{1,k} - m_{k}^{l}),\ l = \overline{2,L},\ k = \overline{2,K}; \tag{57}$$

$$q_{1k}^{l} \geq (g_{l,k\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} p_{lw} y_{wk}) - M(1 - x_{1,k} + m_{k}^{l}),\ l = \overline{2,L},\ k = \overline{2,K}; \tag{58}$$

$$[(q_{j\text{-}1,k}^{l} + \sum_{w=1}^{W} t_{lw} y_{wk}) - (q_{jk}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W} t_{l\text{-}1,w} y_{wk})] + M m_{jk}^{l} \geq 0,\ l = \overline{2,L},\ k = \overline{1,K},\ j = \overline{2,J}; \tag{59}$$

$$[(q_{jk}^{l\text{-}1}+\sum_{w=1}^{W}t_{l\text{-}1,w}y_{wk})-(q_{j\text{-}1,k}^{l}+\sum_{w=1}^{W}t_{lw}y_{wk})]+M(1-m_{jk}^{l})>0,\ l=\overline{2,L},\ k=\overline{1,K},\ j=\overline{2,J};\quad(60)$$

$$q_{jk}^{l}\geq q_{jk}^{l\text{-}1}+\sum_{w=1}^{W}t_{l\text{-}1,w}y_{wk}-M(2-x_{jk}-m_{jk}^{l}),\ l=\overline{2,L},\ k=\overline{1,K},\ j=\overline{2,J};\quad(61)$$

$$q_{jk}^{l}\geq(q_{j\text{-}1,k}^{l}+\sum_{w=1}^{W}t_{lw}y_{wk})-M(1-x_{jk}+m_{jk}^{l}),\ l=\overline{2,L},\ k=\overline{1,K},\ j=\overline{2,J};\quad(62)$$

$$C_{\max}\geq g_{Lk},\ k=\overline{1,K};\quad(63)$$

$$q_{jk}^{l}\geq 0;\ g_{lk}\geq 0,\ l=\overline{1,L},\ k=\overline{1,K},\ j=\overline{1,I};\quad(64)$$

$$x_{jk}\in\{0,1\},\ y_{kw}\in\{0,1\},\ v_{kj}^{w}\in\{0,1\},\ w=\overline{1,W},\ k=\overline{1,K},\ j=\overline{1,J};\quad(65)$$

$$z_{wkj}\in\{0,1\},\ w=\overline{1,W},\ k=\overline{1,K},\ j=\overline{1,J};\quad(66)$$

$$m_{l}\in\{0,1\},\ m_{k}^{l}\in\{0,1\},\ m_{jk}^{l}\in\{0,1\},\ l=\overline{2,L},\ k=\overline{1,K},\ j=\overline{2,J}.\quad(67)$$

Линеаризация модели (24)-(40) выполнена аналогично:

1) введены переменные

$z_{r_w kj}^{w}:\ z_{r_w kj}^{w}=y_{r_w,k}^{w}x_{j,r_w}^{w}\ (w=\overline{1,W},\ r_w=\overline{1,R_w},\ k=\overline{1,K},\ j=\overline{1,J}\ )$;

2) введены переменные

$m_l\ (l=\overline{2,L}),\ m_k^l\ (l=\overline{2,L},k=\overline{2,K}),\ m_{jk}^l\ (l=\overline{2,L},k=\overline{1,K},j=\overline{2,J}).$

Введены ограничения, аналогичные модели (41)-(67). Итоговая форма модели второго вида решения рассматриваемой задачи оптимизации:

1) целевая функция:

$$min\ C_{\max};\quad(68)$$

2) ограничения:

$$\sum_{j=1}^{J}x_{j,r_w}^{w}\geq 2,\ w=\overline{1,W},\ r_w=\overline{1,R_w};\quad(69)$$

$$\sum_{r_w=1}^{R_w}\sum_{j=1}^{J}x_{j,r_w}^{w}=n^{w},\ \ w=\overline{1,W};\quad(70)$$

$$\sum_{k=1}^{K}y_{r_w,k}^{w}=1,\ w=\overline{1,W},\ r_w=\overline{1,R_w};\quad(71)$$

$$\sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w}y_{r_w,k}^{w}=1,\ \ k=\overline{1,K};\quad(72)$$

$$\sum_{r_w=1}^{R_w}y_{r_w,k}^{w}+\sum_{r_w=1}^{R_w}y_{r_w,k+1}^{w}\leq 1,\ \ w=\overline{1,W},\ k=\overline{1,K\text{-}1};\quad(73)$$

$$x_{j,r_w}^{w}-x_{j+1,r_w}^{w}\geq 0,\ w=\overline{1,W},\ r_w=\overline{1,R_w},\ j=\overline{1,J\text{-}1};\quad(74)$$

$$q_{11}^{1}\geq\sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w}p_{1w}y_{r_w,1}^{w};\quad(75)$$

$$q_{j,k}^{1}\geq q_{j\text{-}1,k}^{1}+\sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w}t_{1w}y_{r_w,k}^{w}-M\cdot(1-\sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w}z_{r_w kj}^{w}),\ k=\overline{1,K},\ j=\overline{2,J};\quad(76)$$

$$g_{lk}\geq q_{j,k}^{l}+\sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w}t_{lw}y_{r_w,k}^{w}-M\cdot(1-\sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w}z_{r_w kj}^{w}),\ l=\overline{1,L},k=\overline{1,K},\ j=\overline{1,J};\quad(77)$$

$$q_{1,k}^{1} \geq g_{1,k\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} p_{1w} y_{r_w,k}^{w} - M \cdot (1 - \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} z_{r_w,k,1}^{w}),\ k = \overline{2,K}; \tag{78}$$

$$[\sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} p_{lw} y_{r_w,1}^{w} - (q_{11}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{l\text{-}1w} y_{r_w,1}^{w})] + M m_l \geq 0,\ \ l = \overline{2,L}; \tag{79}$$

$$[(q_{11}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{l\text{-}1w} y_{r_w,1}^{w}) - \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} p_{lw} y_{r_w,1}^{w}] + M(1 - m_l) \geq 0,\ l = \overline{2,L}; \tag{80}$$

$$q_{11}^{l} \geq (q_{11}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{l\text{-}1w} y_{r_w,1}^{w}) - M(1 - m_l),\ l = \overline{2,L}; \tag{81}$$

$$q_{11}^{l} \geq \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} p_{lw} y_{r_w,1}^{w} - M m_l,\ l = \overline{2,L}; \tag{82}$$

$$[(g_{l,k\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} p_{lw} y_{r_w,k}^{w}) - (q_{1,k}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{l\text{-}1,w} y_{r_w,k}^{w})] + M m_k^{l} \geq 0,$$
$$l = \overline{2,L}, k = \overline{2,K}; \tag{83}$$

$$[(q_{1,k}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{l\text{-}1,w} y_{r_w,k}^{w}) - (g_{l,k\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} p_{lw} y_{r_w,k}^{w})] + M(1 - m_k^{l}) \geq 0,$$
$$l = \overline{2,L}, k = \overline{2,K}; \tag{84}$$

$$q_{1k}^{l} \geq (q_{1,k}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{l\text{-}1,w} y_{r_w,k}^{w}) - M(2 - \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} z_{r_w,k,1}^{w} - m_k^{l}),$$
$$l = \overline{2,L}, k = \overline{2,K}; \tag{85}$$

$$q_{1k}^{l} \geq (g_{l,k\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} p_{lw} y_{r_w,k}^{w}) - M(1 - \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} z_{r_w,k,1}^{w} + m_k^{l}),$$
$$l = \overline{2,L}, k = \overline{2,K}; \tag{86}$$

$$[(q_{j\text{-}1,k}^{l} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{lw} y_{r_w,k}^{w}) - (q_{jk}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{l\text{-}1,w} y_{r_w,k}^{w})] + M m_{jk}^{l} \geq 0,$$
$$l = \overline{2,L}, k = \overline{1,K}, j = \overline{2,J}; \tag{87}$$

$$[(q_{jk}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{l\text{-}1,w} y_{r_w,k}^{w}) - (q_{j\text{-}1,k}^{l} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{lw} y_{r_w,k}^{w})] + M(1 - m_{jk}^{l}) \geq 0,$$
$$l = \overline{2,L}, k = \overline{1,K}, j = \overline{2,J}; \tag{88}$$

$$q_{jk}^{l} \geq (q_{jk}^{l\text{-}1} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{l\text{-}1,w} y_{r_w,k}^{w}) - M \cdot (2 - \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} z_{r_w kj}^{w} - m_{jk}^{l}),$$
$$l = \overline{2,L}, k = \overline{1,K}, j = \overline{2,J}; \tag{89}$$

$$q_{jk}^{l} \geq (q_{j\text{-}1,k}^{l} + \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} t_{lw} y_{r_w,k}^{w}) - M \cdot (1 - \sum_{w=1}^{W}\sum_{r_w=1}^{R_w} z_{r_w kj,}^{w} + m_{jk}^{l}),$$
$$l = \overline{2,L}, k = \overline{1,K}, j = \overline{2,J}; \tag{90}$$

$$C_{\max} \geq g_{Lk},\ k = \overline{1,K}; \tag{91}$$

$$z_{r_w kj}^{w} \leq y_{r_w,k}^{w}; z_{r_w kj}^{w} \leq x_{j,r_w}^{w}; z_{r_w kj}^{w} \geq y_{r_w,k}^{w} + x_{j,r_w}^{w} - 1,\ z_{r_w kj}^{w} \in \{0,1\},$$

$$w=\overline{1,W}\ ,\ r_w=\overline{1,R_w},\ k=\overline{1,K},\ j=\overline{2,J}\ ; \tag{92}$$

$$q_{jk}^{l}\geq 0,\ g_{lk}\geq 0\ ,l=\overline{1,L},k=\overline{1,K},\ j=\overline{1,J}\ ; \tag{93}$$

$$x_{j,r_w}^{w}\in\{0,1\}\ ,y_{r_w,k}^{w}\in\{0,1\}\ ,w=\overline{1,W},\ r_w=\overline{1,R_w},k=\overline{1,K},\ j=\overline{1,J}\ ; \tag{94}$$

$$m_l\in\{0,1\},\ m_k^l\in\{0,1\}\ ,m_{jk}^l\in\{0,1\},\ l=\overline{2,L}\ ,k=\overline{1,K}\ ,\ j=\overline{2,J}\ . \tag{95}$$

Исследование моделей оптимизации составов партий и порядков их обработки в КС.

Для исследования моделей (41)-(67), (68)-(95) разработано приложение в среде IBM ILOG CPLEX. Исследование моделей проведено путем решения ряда задач оптимизации составов ПД и вида последовательностей их обработки на устройствах КС. При исследовании использованы параметры типов деталей: 1) неоднородность времени обработки деталей *w*- и *w'*-х типов на *l*-м устройстве – $\max(t_{lw})/\min(t_{lw'})$, 2) неоднородность времени переналадок устройств с обработки деталей *w*-типа на обработку деталей *w'*-го типа – $\max(t_{w,w'}^{l})/\min(t_{w,w'}^{l'})$.

Заданы значения отношений:

$$\max(t_{w,w'}^{l})/\min(t_{w,w'}^{l'})\in\{1,2,4,8\}\ ,$$

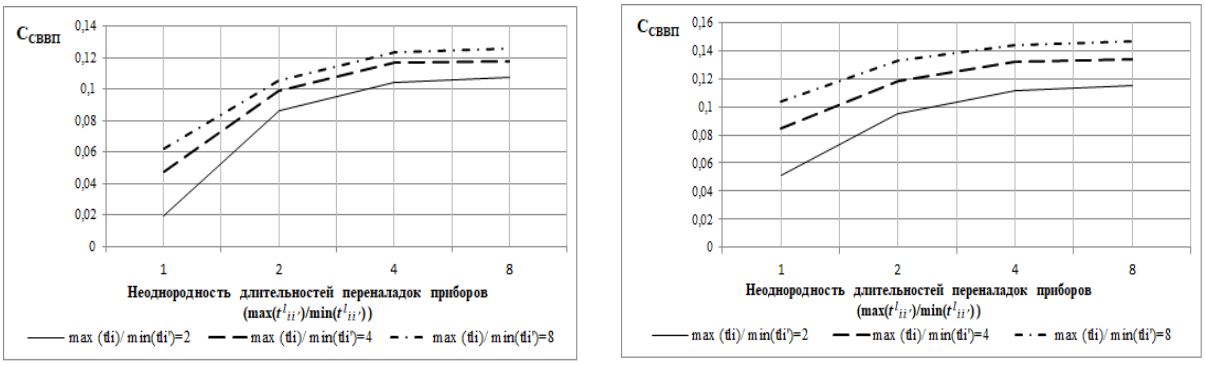
$$\max(t_{lw})/\min(t_{lw'})\in\{2,4,8\}\ ).$$

Количество приборов L=3. Параметры моделей представлены в Таблице 1.

Таблица 1 – Значения параметров моделей

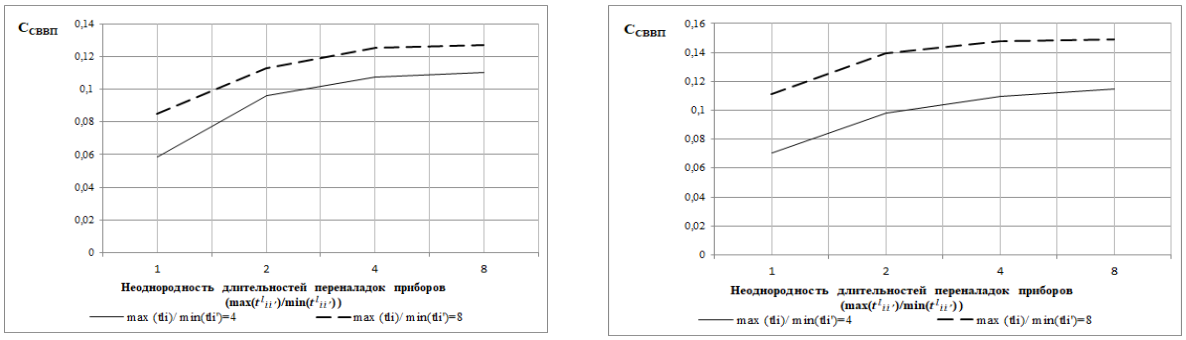
Номер модели	Количество типов заданий, W	Количество заданий каждого типа N^w	Количество пакетов каждого типа, R_w	Количество пакетов, K	Максималь-ное количество заданий в каждом пакете, J
1	4	10	–	8	6
	5	12	–	15	5
2	4	12	3	12	5
	5	12	3	15	7

Показателем эффективности решений по составам ПД и расписаниям их обработки после оптимизации является отношение $C_{\text{сввп}}=(C_{max}^{\text{фикс}}-C_{max}^{\text{овзп}})/C_{max}^{\text{фикс}}$ ($C_{\text{сввп}}$– снижение времени выполнения партий (СВВП) при оптимизации решений по их составам в сравнении с фиксированными ПД, $C_{max}^{\text{фикс}}$ – значение критерия C_{max} для фиксированных ПД, $C_{max}^{\text{овзп}}$ – значение критерия $C_{\max}$ для оптимальных составов ПД). Зависимости $C_{\text{сввп}}$ от значений параметров задач для первой модели представлены на Рис.1. Зависимости значений $C_{\text{сввп}}$ от значений параметров задач для второй модели – на Рис.2. По горизонтальной оси отложены значения степени неоднородности времен переналадок приборов на обработку деталей разных типов, соответствующие отношению $\max(t_{w,w'}^{l})/\min(t_{w,w'}^{l})$, по вертикальной оси – значения величины $C_{\text{сввп}}$.



а) б)

Рис.1 – Уменьшение времени обработки партий деталей при оптимизации их составов в сравнении с фиксированными партиями (первая модель): а) W=4, N^w=10, K=8, J=6; б) W=5, N^w=12, K=15, J=5.



а) б)

Рис.2 – Уменьшение времени обработки партий деталей при оптимизации их составов в сравнении с фиксированными партиями (вторая модель): а) W=4, N^w=12, R_w=3; K=12, J=5; б) W=5, N^w=12, R_w=3, K=15, J=7.

Заключение

Современные математические модели MILP и полиномиальные алгоритмы оптимизации расписаний обработки однотипных деталей используются для решения задач параллельного пакетирования (при параллельном выполнении заданий, входящих в партии). В этой связи выполнена разработка математических моделей, позволяющих реализовать оптимизацию составов партии деталей при их последовательной обработке в КС и оптимизацию порядков партий для осуществления операций с ними на устройствах указанных систем. При этом в разработанных моделях реализован способ передачи деталей из партий на следующее устройство сразу при завершении операций с ними на предыдущем устройстве (без ожидания окончания обработки всех деталей в партиях). Также использован предложенный в работе способ определения значений индикаторных переменных, позволяющий реализовать требование распределения всех деталей разных типов по партиям. Выполнена линеаризация предложенных моделей путем введения индикаторных переменных и соответствующих им ограничений. Исследования моделей MILP выполнены с использованием разработанного в среде IBM ILOG CPLEX приложения. Полученные результаты показали с одной стороны работоспособность моделей, а с другой – повышение эффективности процессов обработки деталей разных типов при их включении в партии и оптимизации порядков обработки партий на устройствах КС.

Библиографический список.

1. Кротов К.В. Модели смешанного целочисленного линейного программирования оптимизации включения заданий в пакеты и порядков проведения операций с ними в конвейерных системах / К.В. Кротов // Информационно-управляющие системы. – 2024. – № 6. – С. 46-57.
2. Suppiah Ya. A hybrid tabu search for batching and sequencing decisions in a single machine environment / Ya. Suppiah, M. Omar // Computers & Industrial Engineering. – 2014. – № 78. – P. 135-147.
3. Trindade R. Arc-flow approach for single batch-processing machine scheduling / R. Trindade, O. Bassi de Araujo, M. Fampa // Computer & Operation Research. – 2021. – № 134. – Article ID: 105394.
4. Yang F. Scheduling a single parallel-batching machine with non-identical job sizes and incompatible job families / F. Yang, M. Davari, W. Wei [et al.] // European Journal of Operational Research. – 2022. – Vol. 303(2). – P. 602-615.
5. Ogun B. Mathematical Models for a Batch Scheduling Problem to Minimize Earliness and Tardiness / B. Ogun, A.-U. Cigdem // Journal of Industrial Engineering and Management. – 2018. – № 11(3). – P. 390-405.
6. Pei J. Single-machine and parallel-machine serial-batching scheduling problems with position-based learning effect and linear setup time / J. Pei, B.Cheng, X.Liu [et al.] // Annals of Operations Research. – 2019. – № 272(3). – P. 1-25.
7. Wua W. Robust scheduling for minimizing maximum lateness on a serial-batch processing machine / W. Wua, L. Tangb, A. Pizzuti // Information Processing Letters. – 2024. – № 186. – Article ID: 106473.
8. Li Sh. Algorithms for two-agent unbounded serial-batch scheduling with makespan and maximum lateness objectives / Sh. Li, M. Li, M. Khan // Networks and Heterogeneous Media. – 2023. – Vol. 18. – Iss.4. – P. 1678-1691.
9. Rostami M. A Hybrid Bee Algorithm for Two-Machine Flow-Shop Scheduling Problems with Batch Delivery / M. Rostami, S. Shad // Journal of Quality Engineering and Production Optimization. – 2020. – Vol.5. – P. 137-164.
10. Matin H. Makespan minimization in flowshop batch processing problem with different batch compositions on machines / H. Matin, N. Salmasi, O. Shahvari // International Journal of Production Economics. – 2017. – № 193. – P. 832-844.
11. Hidayat N. Multiple item batch scheduling model on a batch processor to minimize total actual flowtime parts through the shop / N. Hidayat, T. Oktaviani, A. Halim // IOP Conference Series Materials Science and Engineering. – May 2020. – № 830(4).
12. Hertrich Ch. Scheduling proportionate flow shop of batching machines / Ch. Hertrich, Ch. Weiß, H. Ackermann [et al.] // Journal of Scheduling. – 2020. – № 23. – P. 575-593.
13. Halim A. Single Item Batch-scheduling Model for a Flow Shop with m Batch-processing Machines to Minimize Total Actual Flow Time / A. Halim, N. Hidayat, W. Aribowo // International Journal of Technology. – 2022.–№ 13(4). – P. 816-826.
14. Zhang Y. The production scheduling problem in a multi-page invoice printing system / Y. Zhang, Z. Zhou, J. Liu // Computer&Operation Research. – 2010. – № 37. – P. 1814-1821.
15. Mauluddin Y. Three-stage flow-shop scheduling model with batch processing machine and discrete processing machine / Y. Mauluddin // 3rd Annual Applied Sciences and Engineering Conference AASEC 2018. – Vol. 197. – Article ID: 14002.

16. Shahvari O. Hybrid flow shop batching and scheduling with a bi-criteria objective / O. Shahvari, R. Logendran // International Journal Production Economics. – 2016. – № 179. – P. 239-258.
17. Wang S. Two-stage hybrid flow shop batching and lot streaming with variable sublots and sequence-dependent setups / S. Wang, M. Kurz M., S. Mason // International Journal of Production Research. – 2019. – Vol.57.–№ 22. – P. 6893-6907.
18. Suryadhini P. A Batch Scheduling Model for a Three-stage Flow Shop with Job and Batch Processors Considering a Sampling Inspection to Minimize Expected Total Actual Flow Time / P. Suryadhini, S. Sukoyo, S. Suprayogi [et al.] // Journal of Industrial Engineering and Management. – 2021. – № 14(3), P. 520-537.
19. Asghari M. Transformation and Linearization Techniques in Optimization: A State-of-the-Art Survey / M. Asghari, A. Fathollahi-Fard, S. Mirzapour Al-e-hashem [et al.] // Mathematics. – 2022. – № 10. – Article ID: 283.

[1]Кротов Кирилл Викторович, д-р техн. наук, доцент, krotov_k1@mail.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

Krotov Kirill Viktorovich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, krotov_k1@mail.ru, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

УДК 004.94

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД СТАБИЛИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ ГЕНЕРАТИВНО-СОСТЯЗАТЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТРИКИ ВАССЕРШТЕЙНА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ БИОМЕДИЦИНСКИХ ДАННЫХ

Абибуллаев Э.А.[1]

A NUMERICAL METHOD FOR STABILIZING THE TRAINING OF GENERATIVE ADVERSARY MODELS USING THE WASSERSTEIN METRIC FOR APPROXIMATION OF BIOMEDICAL DATA DISTRIBUTIONS

Abibulaev E.A.[1]

Аннотация. *В современной онкодиагностике проблема автоматизированной классификации редких патологий остается одной из трудноразрешимых задач. Ограниченность доступных размеченных наборов данных, характерная для орфанных заболеваний, приводит к неспособности классических алгоритмов глубокого обучения формировать устойчивые разделяющие гиперплоскости, что выражается в низких показателях чувствительности (Recall) и высокой частоте ложноотрицательных заключений. В работе представлен второй этап (E2) комплексного исследования по разработке гибридной диагностической системы. В отличие от первого этапа, где применялась базовая архитектура DCGAN, в текущем эксперименте предложен и обоснован переход к использованию генеративно-состязательных сетей на основе метрики Вассерштейна с градиентным штрафом и спектральной нормализацией.*

Abstract. *In modern cancer diagnostics, the automated classification of rare pathologies remains one of the most pressing and challenging problems. The limited availability of labeled datasets, typical for orphan diseases, results in the inability of classical deep learning algorithms to generate stable separating hyperplanes, resulting in low sensitivity (recall) rates and a high false-negative rate. This paper presents the second stage (E2) of a comprehensive study to develop a hybrid diagnostic system. Unlike the first stage, which utilized the basic DCGAN architecture, this experiment proposes and mathematically justifies the use of generative adversarial networks based on the Wasserstein metric with gradient penalty and spectral normalization.*

Ключевые слова. *Генеративно-состязательные сети, синтетическая аугментация данных, гибридные CNN-GAN модели, глубокое обучение.*

Keywords. *Generative adversarial networks, synthetic data augmentation, hybrid CNN-GAN models, deep learning.*

Введение.

В эпоху стремительного развития технологий искусственного интеллекта (ИИ) и компьютерного зрения методы глубокого обучения (Deep Learning, DL) стали "золотым стандартом" в задачах анализа медицинских изображений [1]. Сверточные нейронные сети (CNN) демонстрируют результаты, сопоставимые или превосходящие уровень экспертов-радиологов и патоморфологов при диагностике распространенных заболеваний, таких как аденокарцинома легкого, рак молочной железы или меланома кожи. Однако, когда речь заходит о редких (орфанных) онкологических заболеваниях, эффективность классических DL-подходов резко снижается [2].

Редкие опухоли встречаются с частотой менее 6 случаев на 100 000 человек в год. К таким патологиям относятся, например, остеосаркома (наиболее частый рак кости, но редкий в общей популяции) и хромофобная почечно-клеточная карцинома (подтип рака почки) [3]. Основная проблема при автоматизации диагностики таких заболеваний заключается в фундаментальном противоречии между требованиями алгоритмов глубокого обучения к объему обучающей выборки и объективной реальностью клинической практики.

Современные архитектуры CNN, такие как ResNet, EfficientNet или DenseNet, содержат миллионы настраиваемых параметров [4]. Для корректной настройки этих параметров и предотвращения переобучения требуется, чтобы количество обучающих примеров было достаточно велико для покрытия всего многообразия фенотипических проявлений патологии. В случае редких заболеваний исследователи сталкиваются с ситуацией малого объема выборки для достижения заданной обобщающей способности [5]. Это приводит к тому, что модель "запоминает" единичные примеры, но не способна выучить инвариантные признаки заболевания, что на тестовой выборке проявляется в низкой чувствительности (Recall). В медицинской диагностике низкий Recall недопустим, так как он означает пропуск патологии у больного пациента. Для решения проблемы дефицита данных в предыдущем этапе исследования (эксперимент E1) была предложена концепция гибридной CNN-GAN системы [6]. Идея заключалась в использовании генеративно-состязательных сетей (Generative Adversarial Networks, GAN) для искусственного расширения (аугментации) обучающей выборки миноритарного класса.

В эксперименте E1 в качестве генеративного модуля использовалась архитектура DCGAN (Deep Convolutional GAN) [7]. Результаты показали, что добавление синтетических изображений позволяет повысить точность классификации редкой опухоли надпочечников с 85.6% до 92.3%. Однако, несмотря на успех, качественный анализ результатов E1 выявил ряд существенных ограничений, свойственных архитектуре DCGAN: 1. Нестабильность обучения (процесс обучения часто расходился, требуя тщательного подбора гиперпараметров и "ручной" остановки обучения; 2. Схлопывание мод (Mode Collapse) (генератор начинал производить ограниченный набор однообразных изображений, игнорируя вариативность реальной патологии); 3. Низкое качество текстур (синтетические изображения часто содержали артефакты (размытость, шумы), которые могли вводить классификатор в заблуждение, заставляя его обучаться на нерелевантных признаках) [8-10].

Статья посвящена описанию второго этапа исследования (эксперимент E2), который направлен на устранение указанных недостатков путем внедрения

методов устойчивого обучения GAN. Основная гипотеза Е2 состоит в том, что использование функции потерь на основе расстояния Вассерштейна с механизмом градиентного штрафа (WGAN-GP) и спектральной нормализации (SNGAN) позволит генерировать не только визуально правдоподобные, но и статистически репрезентативные медицинские изображения. Это должно привести к дальнейшему повышению чувствительности диагностической модели на сложных гетерогенных наборах данных, таких как остеосаркома и рак почки.

Целью работы является повышение чувствительности диагностики редких опухолей – остеосаркомы (гистологические данные) и хромофобной почечно-клеточной карциномы (радиологические данные TCGA-KICH) – за счет генерации синтетических образцов, обладающих высокой морфологической достоверностью.

Математические модели распределений.

Пусть X – пространство входных данных (изображений), где $x \in R^{H \times W \times C}$ представляет собой отдельный срез КТ/МРТ или гистологический патч. Пусть $Y = \{0,1\}$ – пространство меток классов, где 1 соответствует наличию редкой патологии ("опухоль"), а 0 – отсутствию ("норма" или фоновые ткани).

Имеется обучающая выборка $D_{train} = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$, полученная из неизвестного совместного распределения P_{XY} . Задача состоит в нахождении оптимальных параметров θ^* классификатора $f_\theta : X \to Y$, минимизирующих ожидаемый риск. Поскольку истинное распределение P_{XY} неизвестно, минимизируется эмпирический риск с регуляризацией

$$\theta^* = \arg\min_\theta \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L(f_\theta(x_i), y_i) + \gamma R(\theta)\right),$$

где L – функция потерь (например, бинарная кросс-энтропия, BCE), а $R(\theta)$ – регуляризатор.

Бинарная кросс-энтропия для одного примера определяется как:

$$L(p, y) = -[y \log p + (1-y)\log(1-p)],$$

где $p = f_\theta(x)$ – предсказанная вероятность принадлежности к классу 1.

В условиях редких заболеваний (Few-Shot Learning), когда N мало, эмпирическое распределение $\hat{P}_{data}$ плохо аппроксимирует истинное распределение P_{data}. Это приводит к тому, что классификатор f_θ, минимизируя ошибку на D_{train}, показывает высокую ошибку на генеральной совокупности (переобучение). Введение генеративного модуля G_φ помогает сгладить эмпирическое распределение, заполнив пробелы в пространстве признаков синтетическими данными.

В классической постановке GAN (использованной в Е1) игра между генератором G и дискриминатором D описывается как поиск равновесия Нэша для функции ценности:

$$\min_G \max_D V(D,G) = E_{x \approx p_{data}(x)}[\log D(x)] + E_{z \approx p_z(z)}[\log(1 - D(G(z)))].$$

Теоретический анализ показывает, что при оптимальном дискриминаторе D^*, минимизация этой функции эквивалентна минимизации дивергенции

Йенсена-Шеннона (JSD) между распределением реальных данных p_{data} и распределением генератора p_g:

$$JSD(p_{data} \| p_g).$$

Однако, как показано в [Arjovsky et al.], если носители распределений p_{data} и p_g не пересекаются (что высоковероятно в многомерном пространстве изображений), JSD принимает постоянное значение ($\log 2$), а её градиент становится равным нулю. Это приводит к проблеме затухания градиентов: генератор перестает получать информативный сигнал от дискриминатора и обучение останавливается. Это объясняет нестабильность, наблюдавшуюся в эксперименте E1.

Для решения проблемы затухания градиентов в эксперименте E2 предлагается использовать расстояние Вассерштейна, которое определяется как

$$W(p_{data}, p_g) = \inf_{\gamma \in \Pi(p_{data}, p_g)} E_{(x,y)\approx\gamma}[\|x - y\|],$$

где $\Pi(p_{data}, p_g)$ – множество всех совместных распределений γ, маргинальными распределениями которых являются p_{data} и p_g. Интуитивно это расстояние показывает минимальную "работу", необходимую для трансформации одного распределения в другое.

Важнейшим свойством $W(p_{data}, p_g)$ является то, что оно непрерывно и дифференцируемо почти везде, даже если носители распределений не пересекаются. Это обеспечивает наличие ненулевых градиентов на всем протяжении обучения. При использовании двойственности Канторовича-Рубинштейна D называется критиком, а не дискриминатором, так как он выдает не вероятность, а скалярную оценку «реалистичности».

В оригинальном методе WGAN ограничение Липшица обеспечивалось клиппингом весов, что приводило к патологическому поведению оптимизации. В рамках E2 используется усовершенствованный метод WGAN-GP, где ограничение на градиент накладывается через штраф в функции потерь. Функция потерь для критика D в WGAN-GP имеет вид

$$L_{critic} = E_{\tilde{x}\approx p_g}[D(\tilde{x})] - E_{x\approx p_{data}}[D(x)] + \lambda E_{\hat{x}\approx p_{\hat{x}}}[(\|\nabla_{\hat{x}} D(\hat{x})\|_2 - 1)^2],$$

где $\tilde{x} = G(z)$ – сгенерированный образец, $\hat{x} = \varepsilon x + (1-\varepsilon)\tilde{x}$ – точка, случайно выбранная на отрезке, соединяющем реальный и сгенерированный образцы, λ – коэффициент штрафа (гиперпараметр регуляризации). В исследованиях медицинских изображений эмпирически установлено оптимальное значение $\lambda = 10$, $\nabla_{\hat{x}} D(\hat{x})$ – градиент критика по отношению к входному изображению (а не к весам сети).

Градиентный штраф заставляет норму градиента критика стремиться к 1, что является достаточным условием для выполнения ограничения Липшица и обеспечивает стабильность обучения.

Описание данных и методология исследования.

Для верификации теоретических положений и проверки гипотезы о повышении чувствительности диагностики был разработан и проведен численный эксперимент на двух наборах данных, представляющих различные типы медицинской визуализации: гистопатологию и радиологию.

Выбор датасетов обусловлен необходимостью проверки универсальности

предлагаемого метода WGAN-GP для разных модальностей и типов редких опухолей.

1. Остеосаркома (Гистопатология) – агрессивная злокачественная опухоль кости. Несмотря на то, что это самая частая первичная опухоль костей, в абсолютных цифрах она является редким заболеванием (орфанным). В качестве источника данных выбрана коллекция «Osteosarcoma-Tumor-Assessment» из архива TCIA. Набор состоит из гистологических изображений, окрашенных гематоксилином и эозином (H&E) и содержит всего 1144 изображения размером 1024×1024 пикселей при увеличении 10X. Набор содержит классы: Non-Tumor (Норма/Без опухоли): 536 изображений (47%); Necrotic Tumor (Некроз опухоли): 263 изображения (23%); Viable Tumor (Жизнеспособная опухоль): 345 изображений (30%). В коллекции наблюдается дисбаланс классов. Класс "Некроз" (критически важный для оценки ответа на химиотерапию) представлен наименьшим количеством примеров. В эксперименте E2 решается задача повышения чувствительности именно для классов патологии (Necrotic и Viable) против нормы.

2. TCGA-KICH (Радиология: КТ/МРТ) – хромофобная почечно-клеточная карцинома (Kidney Chromophobe, KICH) – редкий гистологический подтип рака почки, составляющий около 5% от всех почечно-клеточных карцином. В качестве источника данных выбрана коллекция TCGA-KICH в архиве TCIA. Набор содержит радиологические исследования (КТ и МРТ) органов брюшной полости и забрюшинного пространства. Данные доступны всего для 15 пациентов, что делает этот датасет классическим примером задачи Few-Shot Learning (обучение на малом количестве примеров). Общее количество DICOM-файлов (срезов) составляет 9221, однако информативных срезов, содержащих визуализацию опухоли, на порядок меньше. Набор содержит классы: Tumor (Опухоль): Срезы, на которых аннотирована опухоль; Normal (Норма): Срезы интактной паренхимы почки или окружающих тканей. Экстремально малый размер выборки пациентов делает невозможным обучение глубоких CNN "с нуля" без применения агрессивной аугментации и синтеза данных.

Препроцессинг и подготовка данных.

Перед подачей в нейронные сети данные подвергались стандартизированной обработке.

Для Osteosarcoma (Гистология) выполнялся: патчинг: Исходные изображения 1024x1024 разрезались на перекрывающиеся патчи размером 224x224 пикселей. Это позволило увеличить количество обучающих примеров и привести их к формату входа стандартных CNN; Нормализация цвета: применялась normalization Macenko для устранения вариабельности окраски H&E, вызванной различиями в приготовлении препаратов; Аугментация: для реальных данных применялись повороты и отражения.

Для TCGA-KICH (КТ/МРТ) выполнялась: конвертация и оконное преобразование: DICOM-файлы конвертировались в 2D изображения. Для КТ применялось оконное преобразование (windowing) с центром 40 HU и шириной 400 HU (мягкотканное окно) для лучшей визуализации почек; ресайзинг: срезы масштабировались до 224x224; фильтрация: автоматически удалялись срезы, не содержащие ткани (фон), на основе гистограммного анализа; Z-нормализация: Интенсивность пикселей нормировалась $x' = \frac{x - \mu}{\sigma}$, где μ, σ рассчитаны по всему набору данных.

Архитектура и параметры эксперимента E2.

Эксперимент E2 включал в себя обучение генеративной модели WGAN-GP и последующее обучение классификатора на гибридном наборе данных.

Генеративная модель (WGAN-GP) содержит генератор (*G*), который состоит из полносвязного слоя, преобразующего шумовой вектор $z \in R^{100}$ в тензор 4x4x512, и последующих 4 слоев транспонированной свертки (ConvTranspose2d) с шагом 2 и ядром 4x4. Функция активации: ReLU во всех слоях, кроме выходного (Tanh). Выход: 64x64x*C* (затем апскейлинг до 224) или прямая генерация 224x224. Критик модели (*D*) – зеркальная архитектура по отношению к генератору. Используются сверточные слои (Conv2d) с шагом 2 (strided convolutions) вместо пулинга для понижения размерности. Функция активации: LeakyReLU ($\alpha = 0,2$). В слоях критика отсутствует Batch Normalization, так как это вносит зависимость между примерами в батче, что нарушает корректность вычисления штрафа за градиент. Вместо этого используется Layer Normalization или отсутствие нормализации.

В качестве гиперпараметров обучения были выбраны: коэффициент штрафа $\lambda = 10$, отношение обновлений $n_{critic} = 5$ (5 обновлений весов критика на 1 обновление генератора). Это важно для поддержания оптимальности критика относительно текущего генератора (аппроксимация расстояния Вассерштейна), оптимизатор Adam с параметрами learning rate $\alpha = 0,0001$, $\alpha = 0,0001$, $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0,9$. Значение $\beta_1 = 0$ (отсутствие импульса первого порядка) рекомендовано для WGAN-GP для предотвращения нестабильности, размер батча $m = 32$.

В качестве диагностической модели использовалась ResNet-18, инициализированная весами ImageNet. Обучение проводилось на гибридном наборе с синтетическими примерами миноритарных классов, сгенерированные обученным WGAN-GP.

Результаты численного эксперимента.

Представлены количественные и качественные результаты эксперимента E2, а также их сравнение с базовым подходом и результатами этапа E1 (DCGAN).

Для оценки качества синтетических изображений (Таблица 1) использовались метрики FID (Fréchet Inception Distance), которая измеряет расстояние между распределениями признаков реальных и синтетических изображений (меньше – лучше), и IS (Inception Score) (больше – лучше).

WGAN-GP показал наилучшее значение FID (124.7), что свидетельствует о высокой близости распределений. SNGAN показал результаты, близкие к WGAN-GP, но с тенденцией к сглаживанию текстур, что менее желательно для гистопатологии.

Основной метрикой интереса мультиклассовой классификации (Osteosarcoma) являлась чувствительность (Recall) для классов "Viable Tumor" и "Necrotic Tumor", так как их пропуск наиболее критичен (Таблица 2).

Таблица 1 – Сравнение качества генерации на датасете Osteosarcoma

Архитектура GAN	FID Score	Inception Score (IS)	Стабильность обучения
DCGAN (E1)	185.4	2.15	Низкая (частый mode collapse)
WGAN-GP (E2)	124.7	3.89	Высокая (сходимость без настройки)
SNGAN (E2)	131.2	3.65	Высокая

Таблица 2 – Метрики классификации на тестовой выборке (Osteosarcoma)

Метод обучения	Accuracy	Precision (Macro)	Recall (Macro)	F1-score (Macro)
Baseline (Classic Augm.)	87.1%	85.4%	81.2%	83.2%
Hybrid E1 (DCGAN)	89.8%	87.2%	86.5%	86.8%
Hybrid E2 (WGAN-GP)	94.5%	91.8%	95.1%	93.4%
Hybrid E2 (SNGAN)	93.1%	90.5%	92.8%	91.6%

Внедрение WGAN-GP привело к значительному росту Recall (до 95.1%). Это подтверждает, что синтетические данные, сгенерированные с учетом минимизации расстояния Вассерштейна, заполняют "пробелы" в распределении редких классов (некроз), позволяя классификатору формировать более точные решающие правила. Прирост по сравнению с E1 составил 8.6 процентных пунктов по Recall.

Для набора данных рака почки из-за малого количества пациентов использовалась стратегия кросс-валидации Leave-One-Patient-Out (Таблица 3).

Таблица 3 – Метрики бинарной классификации (Tumor vs Normal) (TCGA-KICH)

Метод обучения	Accuracy	Recall (Чувствительность)	F1-score	AUC ROC
Baseline (No GAN)	76.4%	68.0%	71.9%	0.78
Hybrid E2 (WGAN-GP)	88.2%	89.5%	88.8%	0.94

На крайне малой выборке TCGA-KICH эффективность базовой модели была низкой (Recall 68.0%), что делает её непригодной для клиники. Использование WGAN-GP позволило поднять чувствительность до 89.5%. Это подтверждает гипотезу о том, что WGAN-GP способен эффективно интерполировать данные в многообразии признаков даже при наличии всего нескольких десятков обучающих примеров (Few-Shot сценарий).

Была проведена проверка робастности модели к сдвигу домена (domain shift). Модель, обученная на одном подмножестве данных, тестировалась на данных, полученных с другими параметрами сканирования (для TCGA-KICH). Условие робастности имеет вид $\left|F1_{test} - F1_{ext}\right| \le \delta$. Для Baseline модели падение метрики составило $\Delta F1 \approx 0{,}12$ (12%), что превышает порог $\delta = 0{,}05$. Для Hybrid E2 (WGAN-GP) падение составило $\Delta F1 \approx 0{,}04$ (4%), что удовлетворяет критерию устойчивости. Это говорит о том, что WGAN-GP помогает модели выучить более универсальные признаки патологии, не зависящие от специфики конкретного аппарата КТ.

Фундаментальное преимущество WGAN-GP, обеспечившее успех эксперимента E2, заключается в свойствах функции потерь. В DCGAN (E1) дискриминатор быстро обучается отличать реальные изображения от

синтетических, в результате чего градиенты для генератора исчезают, и обучение прекращается преждевременно. Синтетические данные получаются "простыми" и неинформативными для классификатора.

В WGAN-GP использование метрики Вассерштейна гарантирует, что градиент остается информативным даже тогда, когда качество синтетических изображений низкое. Это позволяет тренировать генератор дольше и достигать более глубокой сходимости. В результате синтезируются "трудные" примеры, которые находятся близко к границе классов. Обучение классификатора на таких примерах заставляет его уточнять разделяющую гиперплоскость, что напрямую ведет к повышению чувствительности (Recall) и способности выявлять неочевидные случаи патологии.

Хотя оба метода (WGAN-GP и SNGAN) показали улучшение по сравнению с DCGAN, WGAN-GP продемонстрировал небольшое преимущество в метрике FID и Recall на гистологических данных. Мы связываем это с тем, что спектральная нормализация в SNGAN накладывает жесткое ограничение на веса всех слоев, что может ограничивать выразительную способность (capacity) сети при моделировании сложных высокочастотных текстур остеосаркомы. Градиентный штраф в WGAN-GP является "мягким" ограничением (soft constraint), действующим только в точках сэмплирования, что дает модели больше свободы для аппроксимации сложных распределений. Тем не менее, SNGAN обучается быстрее (примерно на 30% меньше времени на эпоху), так как не требует вычисления вторых производных для градиентного штрафа. Это делает SNGAN перспективным кандидатом для предварительных экспериментов или задач с жесткими ограничениями по времени обучения.

Несмотря на положительные результаты, метод WGAN-GP является вычислительно затратным из-за необходимости выполнения нескольких шагов обновления критика ($n_{critic} = 5$) на один шаг генератора. Кроме того, генерация происходит в 2D пространстве (срезы), что не полностью учитывает объемную структуру опухолей, характерную для данных КТ/МРТ.

Заключение.

В рамках эксперимента E2 реализована и верифицирована методика повышения чувствительности гибридной CNN-GAN системы диагностики редких опухолей с использованием устойчивого обучения WGAN-GP. Применение метрики Вассерштейна и градиентного штрафа устраняет затухание градиентов, характерное для классических GAN, обеспечивая стабильное обучение на малых медицинских выборках. На наборе данных Osteosarcoma достигнуто увеличение чувствительности (Recall) до 95.1%, а на крайне малом наборе TCGA-KICH – до 89.5%. Это подтверждает гипотезу H1 о критической роли качественной генеративной аугментации в снижении риска диагностических ошибок. Предложенный метод демонстрирует высокую устойчивость к вариациям данных, удовлетворяя формальному критерию стабильности.

Результаты работы создают фундамент для следующих этапов исследования, включающих внедрение условной генерации (cGAN) для управления фенотипом синтетических опухолей и адаптацию подхода к 3D-данным. Разработанная методология может быть рекомендована к использованию программно-аппаратных исследовательских комплексах.

Библиографический список.

1. Karmakar A. The role of generative AI in medical image synthesis: a review / A. Karmakar, A. Shaw, S. Rakshit [et al.] // SN Applied Sciences. – 2025. – Vol. 7. – № 10. – Art. 1219.

2. Cruz Y.L.K.F. Generative adversarial networks in histological image segmentation: a systematic literature review / Y.L.K.F. Cruz, A.F.M. Silva, E.E.C. Santana [et al.] // Applied Sciences. – 2025. – Vol. 15. – № 14. – Art. 7802.
3. Kawaguchi K. Viable tumor cell density after neoadjuvant chemotherapy assessed using deep learning model reflects the prognosis of osteosarcoma / K. Kawaguchi, K. Miyama, M. Endo [et al.] // npj Precision Oncology. – 2024. – № 8(1):16. – DOI: 10.1038/s41698-024-00515-y.
4. Hasei J. The three-class annotation method improves the AI detection of early-stage osteosarcoma on plain radiographs / J. Hasei, R. Nakahara, Y. Otsuka [et al.] // Cancers. – 2025. – Vol. 17. – № 1. – Art. 29.
5. Borji A. Advanced hybrid deep learning model for enhanced evaluation of osteosarcoma histopathology images / A. Borji, G. Kronreif, B. Angermayr [et al.] // Frontiers in Medicine. – 2025. – Vol. 12. – Art. 1555907.
6. Абибуллаев Э.А. Разработка гибридной CNN-GAN системы для диагностики редких онкологических заболеваний на основе ограниченных наборов КТ/МРТ-снимков / Э.А. Абибуллаев, В.А. Крамарь // Автоматизация и измерения в машино-приборостроении. – 2025. – № 2(30). – С. 61-70.
7. Yuda E. Comprehensive data augmentation approach using WGAN-GP and UMAP for enhancing Alzheimer's disease diagnosis / E. Yuda, T. Ando, I. Kaneko [et al.] // Electronics. – 2024. – Vol. 13. – № 18. – Art. 3671.
8. Jimenez Y. GAN-based data augmentation to improve breast ultrasound and mammography mass classification / Y. Jimenez, D. Carrión-Figueroa, V. Lakshminarayanan [et al.] // Biomedical Signal Processing and Control. – 2024. – Vol. 94. – Art. 106255.
9. Smith H.K. Synthetic data augmentation using GANs for rare disease classes : preprint / H.K. Smith – 2025. – URL: https://www.researchgate.net/publication/395777702_Synthetic_Data_Augmentation_Using_GANs_for_Rare_Disease_Classes_Outline_Synthetic_Data_Augmentation_Using_GANs_for_Rare_Disease_Classes (дата обращения: 05.02.2026).
10. Jiao Q., Tang Y., Zhuang J., Cong J., Shi Y. MediQ-GAN: quantum-inspired GAN for high-resolution medical image generation / Q. Jiao, Y. Tang, J. Zhuang [et al.] // arXiv.org. – 2025. – arXiv:2506.21015. – URL: https://arxiv.org/abs/2506.21015 (дата обращения: 05.02.2026).

[1]*Абибулаев Энвер Алимович, соискатель, enverabibullaev20@mail.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»*

Abibulaev Enver Alimovich, Applicant, enverabibullaev20@mail.ru, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

УДК 004.94

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЭЛЕМЕНТНОГО И ПЕСТИЦИДНОГО СТАТУСОВ В БИОЛОГИЧЕСКИХ СУБСТРАТАХ МАТЕРИ И НОВОРОЖДЁННОГО

Крамарь В.А.[1], Евстафьева Е.В.[2], Залата О.А.[3], Московчук О.Б.[4]

THE MATHEMATICAL FORMALIZATION AND STATISTICAL METHODS OF ANALYSIS OF ELEMENTAL AND PESTICIDE STATUS IN BIOLOGICAL SUBSTRATES OF THE MOTHER AND THE NEWBORN

Kramar V.A.[1], Evstafieva E.V.[2], Zalata O.A.[3], Moskovchuk O.B.[4]

Аннотация. *Статья предлагает математическую формализацию анализа элементного и пестицидного статуса в биологических субстратах матери и новорожденного. Разработаны подходы к обработке логнормальных распределений с учетом пределов обнаружения, включая расчет геометрического среднего, геометрического стандартного отклонения, квантилей и доверительных интервалов для сравнения групп. Методы реализуются с использованием пакетов R (survival, fitdistrplus, NADA) и Python (scipy, statsmodels, lifelines).*

Abstract. *The article presents mathematical formalization for analyzing elemental and pesticide status in biological substrates of mother and newborn. Approaches are developed for processing lognormal distributions accounting for limits of detection, including calculations of geometric mean, geometric standard deviation, quantiles, and confidence intervals for group comparisons. Methods are implemented using R packages (survival, fitdistrplus, NADA) and Python (scipy, statsmodels, lifelines).*

Ключевые слова. *Математические методы, логнормальное распределение, биологические субстраты, элементный статус.*

Keywords. *Mathematical methods, lognormal distribution, biological substrates, elemental status.*

Введение.

Использование математического моделирования в медицинской науке представляет собой эффективный инструмент для исследования сложных биологических механизмов. Такой подход позволяет формализовать процессы, происходящие в организме, установить количественные связи между физиологическими параметрами и внешними факторами, а также оценить

степень влияния токсикантов. В частности, внедрение строгих математико-статистических моделей в сферу биомониторинга существенно повышает точность оценок воздействия химических элементов и хлорорганических пестицидов на организм беременной женщины и развивающегося плода [1,2].

Химический состав биологических сред беременных и новорождённых является важным индикатором токсико-экологической нагрузки, оказывающей влияние на состояние здоровья будущих поколений [3]. Хлорорганические пестициды, так же, как и ряд микро- и макроэлементов, способны накапливаться в организме, проходить через плацентарный барьер и тем самым формировать потенциальные риски для внутриплодного развития [4,5].

Для корректного анализа данных биомониторинга необходимы математические модели, способные описать реальные статистические свойства концентраций токсикантов. Эти показатели, как правило, имеют только положительные значения, проявляют ярко выраженную асимметрию распределения и нередко содержат левоцензурированные наблюдения, обусловленные пределами обнаружения лабораторных методик [6,7]. Использование логнормальных, гамма- и биномиальных моделей распределения, методов максимального правдоподобия и моделей Тобита позволяет избежать смещённости оценок и обеспечивает корректный статистический анализ [4,8,9].

Настоящая работа основана на данных, собранных на территории Крыма (Таблица 1) и представленных в [10]. На их основе разработана комплексная математико-статистическая схема исследования элементного статуса и содержания хлорорганических пестицидов у родильниц с различными исходами беременности и у их детей.

Рассматриваются две независимые выборки: A – женщины, у которых произошла антенатальная гибель плода; N – женщины с физиологическим исходом беременности. Размер выборки по элементному анализу в [10] не указан явно. По содержанию пестицидов приведены данные для 35 пар “мать–новорождённый”. Анализу подвергались концентрации элементов в венозной крови, а также уровни ГХБ, ΣГХЦГ и ΣДДТ в пяти биосубстратах: венозной крови, пуповинной крови, волосах, грудном молоке и плаценте.

Целью работы является формирование методологической основы с помощью построения математических моделей для автоматизации процесса анализа комплексных биомедицинских данных, что способствует повышению качества диагностики, мониторинга и прогноза последствий воздействия токсичных веществ на организм матери и ребёнка.

Математические модели распределений.

Поскольку концентрации химических веществ принимают только положительные значения и могут различаться на несколько порядков, для их описания обычно применяют логнормальную модель. Её применение оправдано тем, что логарифмы таких величин чаще всего распределены близко к нормальному закону. В логарифмическом масштабе данные становятся симметричными, а в исходной шкале образуют распределение с характерным правым «хвостом».

Логнормальное распределение определяется соотношением:

$$\ln C \sim N(\mu,\sigma^2), C = \exp(Z); Z \sim N(\mu,\sigma^2), \quad (1)$$

где $C > 0$ – концентрация вещества, $\ln C = Z, \mu$ – среднее значение логарифмов (центр нормального «колокола» на логарифмической шкале, σ^2 – дисперсия логарифмов, $\sigma > 0$ – стандартное отклонение.

Важными характеристиками распределения являются: медиана логнормального распределения $GM = \exp(\mu)$ мультипликативный аналог стандартного отклонения $GSD = \exp(\sigma), E[C] = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$ среднее и дисперсия на натуральной шкале $Var[C] = (\exp(\sigma^2)\text{-}1)\exp(2\mu + \sigma^2)$.

Оценки параметров распределения μ и σ определяют по логарифмам исходных наблюдений. Тогда если есть наблюдения $c_1,...,c_n > 0$, то переходя на логарифмическую шкалу $z_i = \ln c_i$, получим оценку $\mu : \hat{\mu} = \overline{z} = \frac{1}{n}\sum z_i$ и оценку $\sigma^2 : \hat{\sigma} = s_z^2 = \frac{1}{n-1}\sum (z_i - \overline{z})^2$. Отсюда получаем оценки $\hat{GM} = \exp(\hat{\mu}), \hat{GSD} = \exp(\hat{\sigma}^2), \hat{E[C]} = \exp(\mu + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2)$.

Если доступны только 25-й и 75-й процентили, то при использовании квантилей стандартной нормали получаем приближённые формулы:

$$\mu \approx \frac{\ln Q_{0,25} + \ln Q_{0,75}}{2}, \sigma \approx \frac{\ln Q_{0,75} - \ln Q_{0,25}}{2, z_{0,75}}, z_{0,75} = 0,67449, \quad (2)$$

где $Q_{0,25}, Q_{0,75}$ – 25-й и 75-й квантили.

Параметрическая логнормальная модель корректно описывает положительные асимметричные величины и даёт возможность работать с геометрическими средними и оценивать отношения концентраций между группами. Статистические сравнения выполняют по логарифмированным данным, что уменьшает влияние выбросов и обеспечивает устойчивые оценки. Она обеспечивает интуитивно понятную интерпретацию через геометрические средние и отношения GM между группами, учитывая вариабельность посредством GSD.

Проверка гипотезы о различии групп будет состоять в проверке нулевой гипотезы $H_0 : \mu_A = \mu_N$, против альтернативы в виде гипотезы $H_1 : \mu_A \neq \mu_N$ по t-критерию Уэлча:

$$T = \frac{\overline{z}_A - \overline{z}_N}{\sqrt{s_A^2 / n_A + s_N^2 / n_N}}, \quad (3)$$

где $\overline{z}_g$ – выборочное среднее логарифмов концентраций в группе g, s_g^2 – выборочная дисперсия логарифмов, n_g – размер выборки в группе g.

Гипотеза заключается в предположении, что измеряемые показатели в исследуемых группах находятся в пределах нормативных значений или отличаются между группами по уровням дефицита и избытка.

Для проверки гипотезы используется статистика в виде t-теста для разницы средних на логарифмической шкале

$$\Delta = \mu_A - \mu_N = \ln(GM_A) - \ln(GM_N). \quad (4)$$

Разность логарифмов запишем как логарифм отношения геометрических средних, т.е.

$$\text{GM} - \text{отношение} \approx \exp(\Delta) = \frac{GM_{\text{A}}}{GM_{\text{N}}}, \quad (5)$$

что отражает во сколько раз медианная концентрация в группе A отличается от таковой в группе N.

В экспериментальных биомедицинских исследованиях часть наблюдений может быть меньше предела обнаружения метода (LOD, limit of detection). Это означает, что истинное значение неизвестно, но известно условие $C_i < LOD$. Такие данные считаются левоцензурированными.

Замена значений, лежащих ниже LOD (например, на 0, на LOD/2 или LOD/$\sqrt{2}$), приводит к систематическим ошибкам – занижению средних и искажению дисперсий, особенно если доля недетектов превышает 10 %.

Пусть концентрации вещества $C_i > 0$ логнормально распределены. Пусть часть измерений C_i $i = 1,...,n_L$ не определена, то есть $C_i < LOD$. Остальные $j = 1,...,n_U$ измерений измерены количественно. Тогда функция правдоподобия имеет вид:

$$\Lambda(\mu,\sigma) = \prod_{i \in \text{детект}} f(c_i \mid \mu,\sigma), \prod_{j \in \text{недетект}} F(LOD \mid \mu,\sigma), \quad (6)$$

где $f(c_i \mid \mu,\sigma)$ – плотность логнормального распределения, $F(LOD \mid \mu,\sigma))$– его функция распределения (CDF).

Максимизация этой функции позволяет получить несмещённые оценки параметров, в отличие от простых подстановок.

Игнорирование LOD приводит к значительному завышению средних значений и к ложным выводам о различиях между группами, особенно при высокой доле недетектируемых значений.

Автоматизация расчетов.

На основе описанных моделей возможна разработка специализированных программных модулей, включающих ряд функциональных элементов.

1. Импорт экспериментальных данных, таких как значения концентраций, информацию о доле недетектируемых наблюдений, пределах обнаружения, параметрах выборок, а также форматы первичных таблиц.

2. Определение типа распределения и оценка параметров. На основе

логарифмирования исходных данных возможен автоматический расчёт: медиан, геометрических средних, геометрических стандартных отклонений, параметров распределения (μ и σ), скорректированных значений при наличии предела обнаружения (LOD). Оценка параметров может выполняться численными методами оптимизации (максимизация функции правдоподобия), с учётом доли цензурированных наблюдений.

3. Автоматическая проверка статистических гипотез. Программная реализация позволяет: проводить сравнение групп по логарифмам концентраций; строить доверительные интервалы для отношения геометрических средних; корректировать уровни значимости при множественных сравнениях. Такой подход исключает влияние арифметических ошибок и обеспечивает объективность анализа.

4. Формирование отчетов и визуализаций. Программа может автоматически формировать: графики распределения с учетом LOD, сравнительные диаграммы между группами, таблицы с итогами расчётов (GM, GSD, доля недетектов, доверительные интервалы). Это особенно важно при анализе многомерных данных и нескольких биосубстратов.

5. Модуль прогнозирования и оценки риска. На базе полученных моделей возможно создание подсистемы прогнозирования токсического влияния, включая: моделирование вероятности превышения нормативов, выявление атипичных концентраций, автоматическую классификацию пациентов по степени риска.

Для целей анализа могут использоваться популярные научные платформы: R (пакеты survival, fitdistrplus, NADA), Python (библиотеки scipy, statsmodels, lifelines).

Таким образом, математические модели, подробно описанные ранее в статье, могут быть реализованы в виде автоматизированного программного инструмента для биомониторинга и научных исследований. Это позволит: исключить ручные вычисления, минимизировать статистические ошибки, стандартизировать и ускорить анализ концентраций токсикантов, повысить качество оценки влияния факторов окружающей среды на организм матери и ребёнка.

Результаты.

В [10] представлены два блока анализа:

1. содержание химических элементов (Mg, Al, Cd, Pb, Mn, Zn, Fe, Cu, Ni, Mo, V) в венозной крови женщин из групп A и N (Таблица 1);

2. концентрации хлорорганических пестицидов (ГХБ, ΣГХЦГ, ΣДДТ) в пяти биологических средах для 35 пар «мать-новорождённый».

Диапазон колебаний содержания ХОП, а также частота их выявляемости в биосубстратах имеет вид [10]: Венозная кровь: ГХБ – 0,001–4,47 мкг/л; ΣГХЦГ – 0,19-26,22 мкг/л; ΣДДТ – 0,28-18,88 мкг/л. Частота обнаружения: 77 %, 97 %, 100 %; Пуповинная кровь: ГХБ – 0,027-1,28 мкг/л; ΣГХЦГ – 0,158-5,66 мкг/л; ΣДДТ – 1,01-11,96 мкг/л. Обнаружение: 77 %, 100 %, 100 %; Волосы: ГХБ – 0,03-13,16 нг/л; ΣГХЦГ – 2,13-38,49 нг/л; ΣДДТ – 5,06-56,39 нг/л. Частота: 97 %, 100 %, 100 %; Грудное молоко: ГХБ – 0,04-14,10 мкг/л; ΣГХЦГ – 0,06-104 мкг/л; ΣДДТ –

5,06-56,39 мкг/л. Частота: 91 %, 100 %, 100 %; Плацента: ГХБ – 0,09-4,87 мкг/кг; ΣГХЦГ – 0,08-5,4 мкг/кг; ΣДДТ – 2,29-26,06 мкг/кг. Частота: 63 %, 97 %, 100 %.

Таблица 1 – Концентрация (мкг/мл) химических элементов (ХЭ) в венозной крови родильниц [10]

ХЭ	Me		25%		75%		Mx		p
	A	N	A	N	A	N	A	N	
Mg	50,1	36,74	46,6	35,78	53,4	37,29	50,1	35,76	0,000
Al	0,550	0,207	0,280	0,150	0,670	0,340	0,550	0,260	0,002
Cd	0,008	0,021	0,006	0,190	0,013	0,021	0,012	0,027	0,000
Pb	0,089	0,195	0,072	0,110	0,120	0,210	0,099	0,175	0,000
Mn	0,035	0,003	0,024	0,002	0,050	0,003	0,040	0,003	0,000
Zn	5,370	0,920	4,870	0,002	6,100	0,003	5,470	1,142	0,000
Fe	325,1	396,4	277,3	296,1	343,3	443,5	326,8	368,6	0,11
Cu	1,420	0,750	1,320	0,720	1,580	0,780	1,496	0,740	0,000
Ni	0,018	0,156	0,006	0,136	0,021	0,172	0,017	0,152	0,004
Mo	0,004	0,074	0,003	0,056	0,033	0,089	0,019	0,072	0,04
V	0,004	0,037	0,003	0,030	0,006	0,049	0,005	0,039	0,000

Для приведенных данных построим логнормальное распределение. Пусть для ΣДДТ в венозной крови известен min-max диапазон $0,28-18,88\mu$г/л. Возьмём приближения $Q_{0,25}=0,6, Q_{0,75}=6\mu$г/л. Эти значения согласованы с широкой правой косостью и приведенным в [10] диапазоном. Тогда:

$$\mu \approx \frac{\ln 0,6+\ln 6}{2}=\frac{-0,5108+1,7918}{2}=0,6405 \Rightarrow \mathrm{GM}\approx \mathrm{e}^{0,6405}=1,90\mu\text{г/л}, \quad (7)$$

$$\sigma \approx \frac{\ln 6-\ln 0.6}{2\cdot 0,67449}=\frac{1,7918-(-0.5108)}{1,34898}=1,704 \Rightarrow \mathrm{GSD}\approx \mathrm{e}^{1,704}=5,50, \quad (8)$$

$$\mathrm{E}[C]\approx \exp(0,6405+0,5\cdot 1,704^2)=\exp(0,6405+1,451)=\exp(2,0915)=8,09\mu\text{г/л}.$$

Полученный результат демонстрирует типичную для логнормального распределения ситуацию, где среднее намного больше медианы из-за наличия «правого хвоста» распределения. Если логнормальное распределение имеет иную асимметрию, то часто выбирают либо гамма -распределение либо лог-логистическое распределение.

Рассмотрим построение параметрической логнормальной модели. Возьмём элемент Al в венозной крови (Таблица 2).

Таблица 2 – Элемент Al в венозной крови

Группа	25% (Q_1)	75% (Q_3)	медиана
A	0,280	0,670	0,550
N	0,150	0,340	0,207

Предположим, что LOD = 0,10 мкг/мл, и у группы N 15 % значений

меньше LOD. Для группы N это значит $n_L = 0{,}15n, n_U = 0{,}85n.$ Найдем приближённые параметры без учёта цензурирования (по квартилям):

$$\hat{\mu}_0 = \frac{\ln Q_3 + \ln Q_1}{2} = \frac{\ln(0{,}34) + \ln(0{,}15)}{2} = -1{,}46,$$
$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\ln Q_3 - \ln Q_1}{2 \times 0{,}67449} = \frac{\ln(0{,}34) - \ln(0{,}15)}{1{,}349} = 0{,}53.$$

Здесь $z_{0{,}75} = 0{,}67449$ – квантиль стандартного нормального распределения.

Выполним корректировку с учётом LOD, решая уравнение правдоподобия:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = 0, \frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = 0. \quad (9)$$

При LOD = 0,10 и доле недетектов 0,15 получаем уточнённые параметры $\hat{\mu} = -1{,}50, \hat{\sigma} = 0{,}56.$ Геометрическое среднее $GM_N = e^{-1{,}50} = 0{,}223$ мкг/мл. При этом, без учёта LOD (по медиане) $GM_N = e^{-1{,}50} = 0{,}207$ мкг/мл. Получаем смещение ≈ 9 %. Пример распределения данных приведен на Рис.1.

Рассмотрим элемент Mg в венозной крови (Таблица 3). При этом, предположим, что LOD = 10 мкг/мл, у группы N – 5 % недетектов (ниже LOD).

Таблица 3 – Элемент Mg в венозной крови

Группа	25% (Q_1)	75% (Q_3)	медиана
A	46,6	53,4	50,1
N	35,78	37,29	36,74

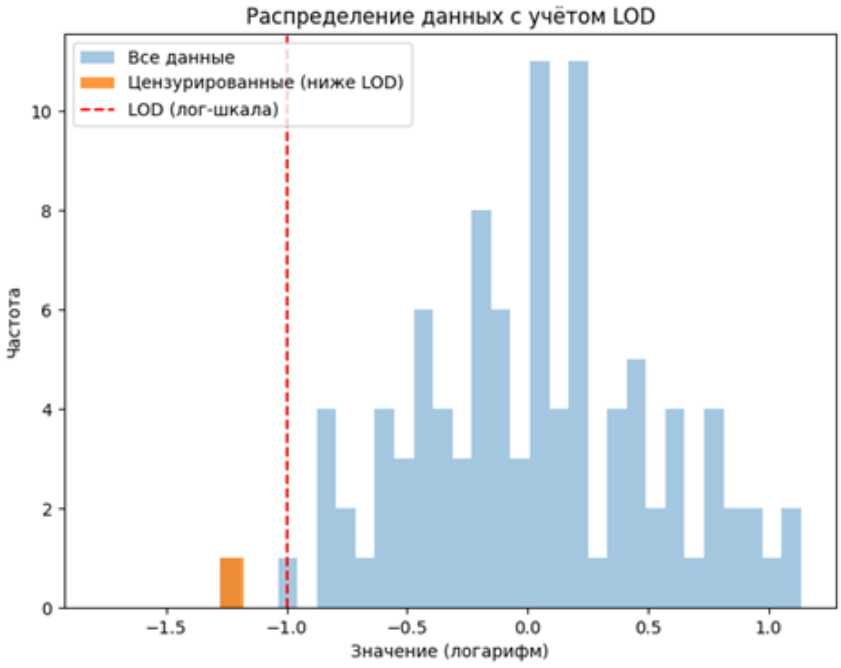


Рис.1 – Распределение данных с учетом LOD

При стандартном (нецензурированном) логнормальном приближении:

$$GM_A = 50{,}1, GM_N = 36{,}7, \text{отношение} = 1{,}36.$$

После учёта 5 % лево-цензурированных значений будет наблюдаться уменьшение ложного контраста между группами. Сформируем сводные таблицы для Al и Mg (Таблицы 4,5).

Таблица 4 – Сводная таблица для Al

Показатель	Без учёта LOD	С учётом LOD	Изменение, %
(n_L / n_U)	0 / 100 %	15 % / 85 %	
$\hat{\mu}$	−1,46	−1,50	-2,7%
$\hat{\sigma}$	0,53	0,56	+5,7%
GM (мкг/мл)	0,232	0,223	-3,9%
GSD	1,70	1,75	

Таблица 5 – Сводная таблица для Mg

Показатель	Без учёта LOD	С учётом LOD	Изменение, %
GM – A (мкг/мл)	50,1	Скорректировано вниз	Уменьшение ложного контраста
GM- N(мкг/мл)	36,7	Скорректировано вниз	Уменьшение ложного контраста

Для Al после учета LOD немного снизилось геометрическое среднее, что исключает завышение оценки концентрации из-за игнорирования недетектируемых значений. Увеличение дисперсии свидетельствует об учете вариабельности при наличии цензурированных данных. Для Mg скорректированы значения геометрических средних обеих групп в сторону уменьшения, что приводит к снижению переоцененного статистического контраста между группами. Для Al медианы дают приближение: $GM_A = 0{,}55$ мкг/мл, $GM_N = 0{,}21$ мкг/мл. Тогда

$$\text{GM} - \text{ratio} \approx \frac{0.55}{0.21} \approx 2{,}62,$$

то есть в группе A концентрация Al примерно в 2,6 раза выше, чем в группе N. При стандартном отклонении около 0,7 и равных размерах выборок стандартная ошибка разности:

$$SE = \sqrt{\frac{0{,}7^2}{30} + \frac{0{,}7^2}{30}} = 0{,}181.$$

95%-доверительный интервал для $\Delta = \ln(2{,}62) = 0{,}964$ находится как

$$0{,}964 \pm 1{,}96 \times 0{,}181 = [0{,}607 ... 1{,}321].$$

Здесь коэффициент 1,96 в формуле доверительного интервала – это квантиль стандартного нормального распределения (также известный как z-значение или критическое значение) для уровня доверия 95%.

В исходной шкале доверительный интервал для GM-отношения:

$$[\exp(0,607)...\exp(1,321)] = [1,83...3,75],$$

что указывает на статистически значимое различие между группами (поскольку 1 не входит в интервал).

Учёт LOD позволяет избежать искажённых оценок и ложных выводов о токсическом влиянии. При значительной доле недетектов корректная статистическая обработка является критически важной.

Заключение.

В статье предложено формирование методологической основы с построением математических моделей статистического анализа уровней химических элементов и хлорорганических пестицидов в биосубстратах матери и новорождённого с учётом асимметрии распределений и наличия левоцензурированных данных. Разработанная математико-статистическая методология обеспечивает строгий и воспроизводимый анализ асимметричных биомедицинских данных с левоцензурированными измерениями. Применение данной модели в биомониторинге беременных и новорождённых повышает надёжность оценки токсикологического риска и может использоваться для обоснования профилактических мероприятий, направленных на снижение вероятности неблагоприятных исходов беременности. Отметим, что данная математическая модель статистического анализа может быть имплементирована в программно-аппаратные измерительные комплексы.

Библиографический список.

1. Мезенцева Л.В. Математическое моделирование в биомедицине / Л.В. Мезенцева // Вестник новых медицинских технологий – 2013 – Т. 20 – № 1 – С. 11-14.
2. Шилов В.В. Биомониторинг воздействия вредных химических веществ / В.В. Шилов, О.Л. Маркова, А.В. Кузнецов // Hygiene & Sanitation (Russian Journal). – 2019 – № 98(6). – С. 591-596.
3. Осипенко Г.Л. Биомониторинг и биоиндикация : практическое руководство / Г.Л. Осипенко. – Гомель : Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, 2015. – 179 с.
4. Радомская В.И. Применение статистических методов в биомониторинге / В.И. Радомская // Ученые записки Казанского университета. Серия: Естественные науки. – 2025. – Т. 167 – № 1. – С. 101-115.
5. Белюченко И.С. Биомониторинг состояния окружающей среды : учебное пособие / И. С. Белюченко, Е. В. Федоненко, А. В. Смагин [и др.]. – Краснодар : КубГАУ, 2014. – 153 с.
6. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биологии : лекции / Г.Ю. Ризниченко. – М. : Ижевск: РХД, 2020. – 560 с.
7. Макарова Н.В. Статистический анализ медико-биологических данных с использованием пакетов статистических программ Statistica, SPSS, NCSS, SYSTAT : методическое пособие / Н.В. Макарова. – СПб. : Политехника-сервис, 2012. – 178 с.
8. Мандель И.Д. Кластерный анализ / И.Д. Мандель. – М. : Финансы и

статистика, 1988. – 176 с.
9. Пэтри А. Наглядная статистика в медицине / А. Пэтри, К. Сэбин. – М. : ГЭОТАР-МЕД, 2003. – 144 с.
10. Современные аспекты экологической медицины: теория и практика на Крымском полуострове : монография / под общ. ред. Е.В. Евстафьевой. – Москва: ИНФРА-М, 2025. – 251 с.

[1]Крамарь Вадим Александрович, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой, vakramar@mail.sevsu.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

[2]Евстафьева Елена Владимировна, д-р биолог. наук, проф., зав. кафедрой, evevstafeva@mail.sevsu.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

[3]Залата Ольга Александровна, канд. мед. наук, доц., доцент, oazalata@mail.sevsu.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

[4]Московчук Ольга Борисовна, канд. биолог. наук, доц., доцент, obmoskovchuk@mail.sevsu.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

Kramar Vadim Aleksandrovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department, vakramar@mail.sevsu.ru, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

Evstafeva Elena Vladimirovna, Doctor of Biological Sciences, Professor, Head of Department, evevstafeva@mail.sevsu.ru, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

Zalata Olga Aleksandrovna, Doctor of Medical Sciences, Docent, Associate Professor, oazalata@mail.sevsu.ru, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

Moskovchuk Olga Borisovna, Candidate of Biological Sciences, Docent, Associate Professor, obmoskovchuk@mail.sevsu.ru, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

УДК 004.94

ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ С ЗАМЕНОЙ ЭЛЕМЕНТА ПРИ ЕЁ КОНТРОЛЕ

Чаленков Н.И.[1], Заморёнов М.В.[2], Заморёнов И.М.[3], Ченгарь О.В.[4]

SYSTEM MODEL VERIFICATION WITH ELEMENT REPLACEMENT DURING CONTROL

Chalenkov N.I.[1], Zamoryonov M.V.[2], Zamoryonov I.M. [3], Chengar O.V.[4]

Аннотация. *При помощи среды имитационного моделирования AnyLogic строится дискретно-событийная имитационная модель полумарковской системы с контролем состояния элемента и его заменой при отказе. Путем сравнения результатов имитационного и аналитического моделирования, полученного на основе метода путей, выполняется верификация аналитической модели. Приводится детальное описание блоков имитационной модели.*

Abstract. *In the article, a discrete-event simulation model of a semi-Markov system is constructed using the AnyLogic simulation modeling environment. This model includes state monitoring of an element and its replacement upon failure. Verification of the analytical model is performed by comparing the results of simulation and analytical modeling, obtained using the path method. A detailed description of the simulation model blocks is provided.*

Ключевые слова. *Замена элемента, имитационная модель, верификация модели, подмножество работоспособных состояний, искусственный интеллект.*

Keywords. *Component replacement, simulation model, model verification, subset of operational states, artificial intelligence.*

Введение.

Обеспечение надёжности технических систем является важным требованием для многих отраслей промышленности, транспорта, энергетики. Современные технические системы представляют собой сложные комплексы, состоящие из множества элементов, отказы которых могут приводить к потерям. Одним из эффективных способов поддержания работоспособности – организация периодического контроля состояния элементов и их своевременная замена. При этом любая аналитическая модель требует её соответствия реальному поведению – верификации [1-3].

Наиболее естественным и наглядным подходом верификации является имитационное моделирование [4,5], которое позволяет воспроизвести поведение системы без использования сложных математических выражений. Такие модели

служат полигоном для тестирования алгоритмов искусственного интеллекта перед их внедрением.

Современные среды имитационного моделирования, такие как AnyLogic [6-10], предоставляют мощные средства для построения дискретно-событийных моделей с гибкой настройкой логики с интеграцией с библиотеками искусственного интеллекта.

Цель данной работы – верификация аналитической модели системы с заменой элемента при её контроле, представленной в [11]. Для достижения этой цели решена задача сравнения результатов аналитического и имитационного моделирования.

Описание системы.

Система содержит критический элемент, работоспособность которого периодически контролируется. Как пример такой системы, можно выделить аккумуляторную батарею в системе бесперебойного питания дата-центра, где критическим элементом является один или группа аккумуляторов. Отказ такого элемента приводит к потере резервного питания и остановке дата-центра при отсутствии внешнего напряжения. Чтобы избежать внезапные отказы проводится периодический контроль состояния элемента (тестирование ёмкости, измерение внутреннего сопротивления, напряжения на каждой банке). После обнаружения неисправности производится замена элемента. Отличительной чертой такой системы – замена выполняется до полного отказа элемента.

Функционирование системы описывается следующими случайными величинами (СВ) [11]:

– время безотказной работы – СВ α_1 с ФР $F_1(t)$;

– время поиска неисправного элемента – СВ β_1 с ФР $G_1(t)$;

– время наработки на проверку элементов системы – СВ α_2 с ФР $F_2(t)$;

– время проверки элементов системы – СВ α_3 с ФР $F_3(t)$;

– время замены элемента системы – СВ β_2 с ФР $G_2(t)$.

В аналитической модели [11], выделяются четыре полумарковских состояния системы:

$$E = \{S_{00}, S_{0x1}, S_{10}, S_{11}\}.$$

S_{00} – система находится в работоспособном состоянии; S_{11} – произошел отказ системы, производится поиск несправного элемента; S_{0x1} – производится проверка элементов системы, работа основной системы продолжается оставшееся время безотказной работы $x > 0$; S_{11} – производится замена элемента системы.

Для данной системы подмножества работоспособных E_+ и неработоспособных E_- состояний имеют вид:

$$E_+ = \{S_{00}, S_{0x1}\}, \quad E_- = \{S_{10}, S_{11}\}.$$

Граф состояний системы приведен на Рис.1.

Имитационная модель в AnyLogic.

Для верификации аналитической модели в среде AnyLogic разработана дискретно-событийная имитационная модель (Рис.2), которая состоит из

следующих основных блоков:

1. Source – источник, генерирующий единственного агента в равный нулю момент времени. Агент при выходе инициализирует время до первого отказа.

2. Initializing – блок Delay с нулевым временем задержки. Необходим для начальной установки переменных при каждом входе агента в работоспособное подмножество состояний.

3. Operation – блок Delay, моделирующий пребывание в работоспособном состоянии S_{00} до наступления отказа или момента начала проверки.

4. Check – блок SelectOutput с двумя выходами: true (отказ) и false (начало проверки). Если условие истинно, значит, отказ произошёл раньше, чем наступило время проверки. В этом случае фиксируется время пребывания в подмножестве работоспособных состояний, и агент направляется на поиск неисправности. Если ложно – начинается проверка.

5. Inspection – блок Delay, моделирующий состояние проверки.

6. InspectionCheck – блок SelectOutput, определяющий результат проверки.

7. Search – блок Delay, моделирующий поиск неисправного элемента.

8. Replace – блок Delay, моделирующий замену элемента.

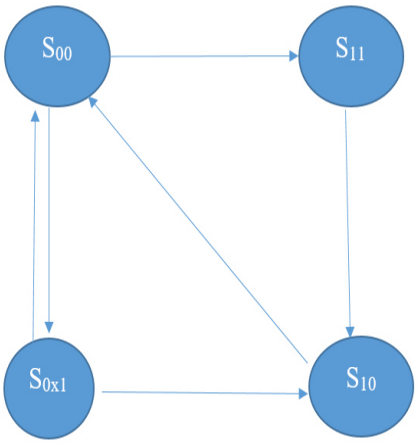


Рис.1 – Граф состояний системы

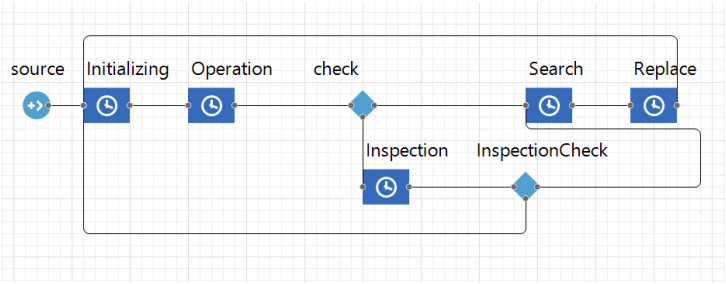


Рис.2 – Модель системы с заменой элемента при её контроле

Результаты моделирования.

Результат моделирования (один прогон модели) представлен на Рис.3.

Моделирование проводилось при следующих исходных данных. Функции распределения $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$, которые распределены по закону Эрланга 2-го порядка с параметрами:

$$\lambda_{11} = 2\ ч^{-1},\ \lambda_{12} = 0.05\ ч^{-1};\ \lambda_{21} = 1\ ч^{-1},\ \lambda_{22} = 0.2\ ч^{-1};$$
$$\lambda_{31} = 1\ ч^{-1},\ \lambda_{32} = 0.5\ ч^{-1};\ \beta_{11} = 0.5\ ч^{-1},\ \beta_{12} = 0.4\ ч^{-1};$$
$$\beta_{21} = 0.5\ ч^{-1},\ \beta_{22} = 0.1\ ч^{-1}.$$

Для подтверждения правильности результатов сравнивались значения математического ожидания времени пребывания в подмножестве работоспособных состояний, полученные при помощи имитационного и аналитического моделирования (таблица 1).

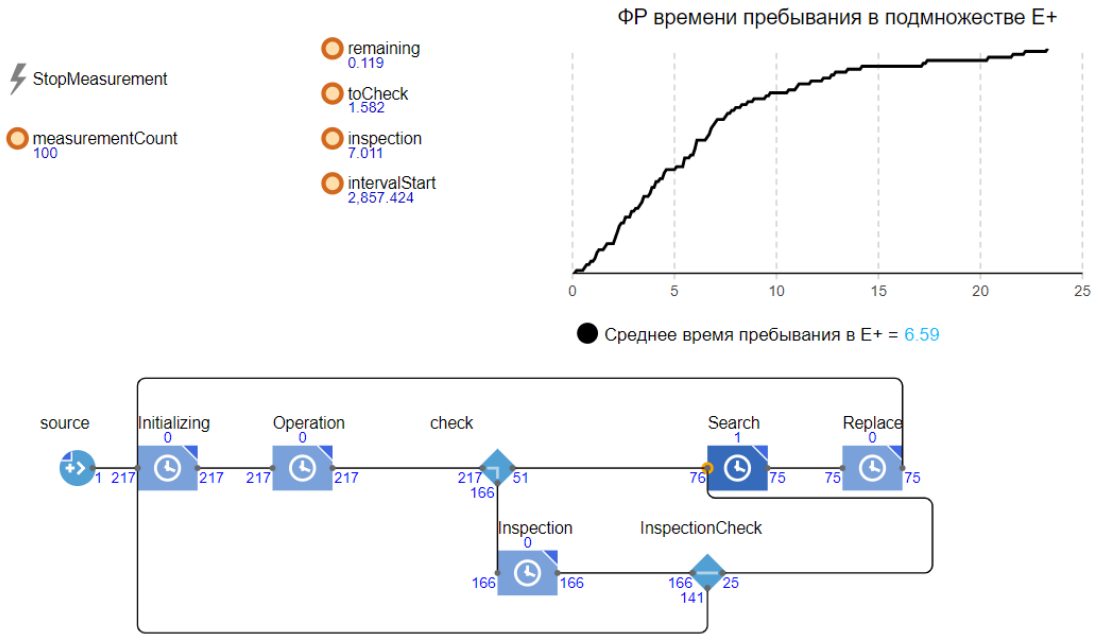


Рис.3 – Результат моделирования системы

Таблица 1 – Результаты моделирования

№	$E_{+им}$, ч.	$E_{+им.ср}$, ч.	$E_{+ан}$, ч.	Относительная погрешность, %
1	6,68	6,65	6,61	0,6
2	6,65			
3	6,67			
4	6,63			
5	6,65			
6	6,59			
7	6,67			
8	6,66			
9	6,68			
10	6,67			

Относительная погрешность результатов моделирования составляет 0,6%, что подтверждает правильность построения аналитической и имитационной моделей.

Библиографический список.

1. Боев В.Д. Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World. / В.Д. Боев – СПб. : БХВ-Петербург, 2004 – 368 с.
2. Советов Б.Я. Моделирование систем: Курсовое проектирование: Учеб. пособие для вузов по спец. АСУ / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – М. : Высш. шк., 1988. – 135 с.
3. Томашевский В.Н. Имитационное моделирование в среде GPSS / В.Н. Томашевский, Е.Г. Жданова. – М. : Бестселлер, 2003. – 416 с.
4. Шрайбер Т.Дж. Моделирование на GPSS / Т.Дж. Шрайбер. – пер. с англ. В.И. Гарчера, И.Л. Шмуйловича ; под ред. М.А. Файнберг. – М. : Машиностроение, 1980. – 592 с.
5. Кудрявцев Е.М. GPSS World. Основы имитационного моделирования различных систем / Е.М. Кудрявцев. – ДМК, Пресс 2004. – 320 с.

6. Боев В.Д. Исследование адекватности GPSS World и AnyLogic при моделировании дискретно-событийных процессов : монография / В.Д. Боев. – СПб. : ВАС, 2011. – 404 с.
7. Дискретно-событийное моделирование : [сайт]. — URL: http://www.anylogic.ru/discrete-event-simulation (дата обращения 03.05.2026). – Текст : электронный.
8. Борщев А.В. От системной динамики и традиционного ИМ – к практическим агентным моделям: причины, технология, инструменты / ООО «XJ Technologies» и СПбПУ [сайт]. — URL: http://simulation.su/uploads/ (дата обращения 30.04.2026). – Текст : электронный
9. Кудрявцев Е.М. Основы имитационного моделирования различных систем. / Е.М. Кудрявцев. – М. : ДМК пресс, 2004. – 320 с.
10. Многоподходное имитационное моделирование в AnyLogic. XJ Technologies : [сайт]. — URL: http://www.xjtek.ru (дата обращения 30.04.2026). – Текст : электронный
11. Заморенов М.В. Моделирование системы с заменой элемента при её контроле / М.В. Заморенов, Н.И. Чаленков, В.Я. Копп // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2024. – № 2. – С. 83-87.

[1]Чаленков Никита Игоревич, старший преподаватель, nichalenkov@mail.sevsu.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

[2]Заморёнов Михаил Вадимович, канд. техн. наук, доц., доцент, mvzamoryonov@mail.sevsu.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

[3]Заморёнов Илья Михаилович, ассистент, ilia.zamoryonov@gmail.com, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

[4]Ченгарь Ольга Васильевна, канд. техн. наук, доц., доцент, ovchengar@mail.sevsu.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

Chalenkov Nikita Igorevich, Senior Lecturer, nichalenkov@mail.sevsu.ru, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

Zamoryonov Mikhail Vadimovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, mvzamoryonov@mail.sevsu.ru, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

Zamoryonov Ilia Mikhailovich, Assistant, ilia.zamoryonov@gmail.com, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

Chengar Olga Vasilievna, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, ovchengar@mail.sevsu.ru, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

УДК 621.43:621.7

ВЛИЯНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ДИАМЕТРА ВАЛА НА ПОКАЗАТЕЛИ НАДЁЖНОСТИ ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

Балакин А.И.[1]

THE EFFECT OF SHAFT DIAMETER MEASUREMENT ERROR ON THE RELIABILITY INDICATORS OF AN INTERNAL COMBUSTION ENGINE

Balakin A.I.[1]

Аннотация. *Показана актуальность оценки влияния погрешности измерения геометрических параметров деталей на показатели надёжности изделия. Приводится математическая модель, связавшая погрешность измерения диаметра вала подшипника скольжения с показателями надёжности. Дан анализ связи «геометрическая погрешность – надёжность». Представлен пример моделирования, на котором показано, что погрешность измерения в 3 мкм (при допуске в 30 мкм) снижает ресурс подшипника скольжения на 15%, а ресурс всего двигателя на 1,26%.*

Abstract. *The relevance of assessing the impact of measurement errors in the geometric parameters of components on product reliability indicators is demonstrated. A mathematical model is presented that links the measurement error in the diameter of a sliding bearing shaft to reliability indicators. An analysis of the relationship between 'geometric error and reliability' is provided. A simulation example is presented, which shows that a measurement error of 3 μm (with a tolerance of 30 μm) reduces the service life of the plain bearing by 15% and the service life of the entire engine by 1.26%.*

Ключевые слова. *Надежность, ресурс, погрешность измерения, подшипник скольжения, двигатель внутреннего сгорания.*

Keywords. *Reliability, service life, measurement error, plain bearing, internal combustion engine.*

Введение.

Актуальным вопросом современного производства является повышения показателей надежности выпускаемых изделий, которая оценивается по ряду параметров. Одними из таких показателей является средний ресурс и вероятность безотказной работы, относящиеся к показателям долговечности и

безотказности. Они показывают математическое ожидание технического ресурса, т.е. наработку объекта от начала его эксплуатации или ее возобновления после ремонта определенного вида до перехода в предельное состояние с вероятностью того, что в пределах заданной наработки отказ объекта не возникнет [1-5].

На показатели надежности оборудования оказывает влияние точность изготовления и измерения параметров деталей, в соответствии с конструкторской документацией.

Одним из распространённых изделий, применяемых в различных отраслях, являются двигатели внутреннего сгорания (ДВС), надежность работы которых оказывает влияние, в том числе, и на экологическую безопасность. Современные экологические и эксплуатационные стандарты, например, EPA Tier 4 Final, China VI, Euro, предъявляют следующие требования к ДВС по гарантийному ресурсу основных узлов не менее 4000 мото-часов.

Как известно, геометрические параметры коленчатого вала определяют совокупную надёжность кривошипно-шатунного механизма и, в конечном счёте, всего двигателя. Анализ гарантийных отказов показывает, что 24,4 % случаев преждевременного вывода ДВС из эксплуатации связано с повреждением подшипников, большая часть из которых приходится на геометрические отклонения диаметров шеек и постелей не выявленные в процессе производства или капитального ремонта [6-7].

Следовательно, оценка влияние погрешности измерения геометрических параметров деталей на показатели надёжности изделия является актуальной задачей.

Цель работы – построение математической модели, позволяющей по известной погрешности измерения диаметра вала подшипника скольжения оценивать средний ресурс и вероятность безотказной работы ДВС в целом.

Согласно ГОСТ 8.051-81 необходимо учитывать влияние погрешности измерения при приемочном контроле. Одним из оцениваемых параметров является величина m – число деталей в процентах от общего числа измеренных, имеющих размеры, выходящие за предельные и неправильно принятые в число годных (т.е. необнаруженный брак) [8]. В соответствии с ГОСТ 8.051-81 влияние погрешностей измерения на результат измерений должно быть учтено при установлении приемочных границ. Для этого предусматривается:

1) основной способ – приемочные границы устанавливают совпадающими с предельными размерами. Среди годных деталей может оказаться до m % неправильно принятых деталей. Если это не повлияет на эксплуатационные показатели детали, то выбранный класс допуска оставляют неизменным и на чертежах проставляют его, если нет, то выбирают более точный квалитет на изготовление или используют второй способ;

2) вводят производственный допуск, при этом приемочные границы смещают внутрь относительно предельных размеров.

Для повышения качества продукции и, как следствие, ее надежности необходимо либо ужесточать требования на изготовление деталей, либо уменьшать погрешность измерения.

В данной работе рассматривается задача определения количественной оценки последствий неизбежной погрешности измерения, т.е. как часто из-за ошибки приёмочного контроля в изделие будет установлена дефектная деталь и как это отразится на вероятности безотказной работы $p(t)$ и на среднем ресурсе t_p.

В качестве изделия рассмотрены подшипники скольжения, используемые в ДВС. Данный подшипник состоит из вкладыша и цапфы вала, отклонение параметров которых приводит к изменению зазора.

Для подшипников скольжения отклонение диаметра вала от расчетных значений приводит к изменению зазора, причем отклонение в ±0,01 мм может изменить зазор в подшипнике скольжения на 20–30 % [6-7].

Проведем анализ связи «геометрическая погрешность – надёжность». Рассмотрим несколько уровней иерархии:

Уровень 1 – Деталь. Для него рассмотрим определение действительного диаметра. $d = d_н + \Delta_{изг} + \Delta_{изм}$, где $d_н$ – номинальное значение диаметра, $\Delta_{изг}$ – допускаемое отклонение, $\Delta_{изм}$ – погрешность измерения, являющаяся случайной величиной.

Уровень 2 – Соединение. Для рассматриваемого случая основной характеристикой в соединении является зазор $S = D_п - d$, где $D_п$ – диаметр подшипника (внутренний диаметр вкладышей).

Как известно жидкостное трение создается в определенном диапазоне зазоров, ограниченном наименьшим $S_{\min}$ и наибольшим $S_{\max}$ функциональными зазорами, которым соответствует толщины масляного слоя $h_{\min}$ [9].

Уровень 3 – Узел. На этом уровне определяем интенсивность износа $I(w)$.

Общий износ сопряжения определяется суммированием мгновенных износов за весь цикл нагружения. При этом, величина приращения износа может быть найдена как умножение пути трения на интенсивность изнашивания, соответствующей одному из видов изнашивания (абразивного и/или фрикционного), или при решении уравнения Арчарда. Согласно результатов работ С.М. Захарова и других исследователей абразивный износ в трибосопряжении можно считать постоянно действующим [10]. Если же толщина смазочного слоя снижается до критических значений, то наряду с абразивным износом необходимо рассматривать износ при граничном трении.

Уровень 4 – Изделие. В работе в качестве изделия рассматривается ДВС

При отклонении величины зазора от расчетного в меньшую сторону, из-за наличия погрешности измерения и принятия бракованного вала годным, происходит падение давления масла, уменьшения толщины масляного слоя $h_{\min}$, повышения трения в соединении, увеличение температуры и как следствие перегрев и заклинивание подшипника, что приводит к критическому отказу ДВС – его остановке.

В большинстве случаев величина $\Delta_{изм}$ описывается нормальным законом распределения с доверительной границей $\pm 2\sigma$, соответствующей доверительной вероятности 0,95. При этом существует ненулевая вероятность того, что действительный диаметр вала будет больше максимально допустимого $d > d_{\max}$, но средство измерения определит его как годный. Именно эта величина будет определять долю так называемого «скрытого» брака.

При построении математической модели оценки среднего ресурса и вероятности безотказной работы ДВС, в зависимости от погрешности измерения вала, были приняты следующие допущения:

– подшипник скольжения цилиндрический, радиальная нагрузка постоянна;

– температурные деформации учтены в суммарном зазоре;

– износ по длине втулки равномерный. Критический износ $w_к$ известен;

– время до отказа T определяется моментом, когда $w(t) \geq w_к$, где $w(t)$ – текущий износ.

Рассмотрим стохастическую связь между d, $h_{\min}$, $I(w)$, T.

Фактический зазор в соединении в общем виде определяется выражением $S = D_n - d$.

С учетом отклонения диаметра вала $\Delta d = d - d_н$, вызванное допуском на изготовление и погрешностью измерения, имеющее случайный характер, выражение для определения фактического зазора примет вид:

$$S = S_к - \Delta d = S_{\min} - \Delta d, \quad (1)$$

где $S_н$ – критический зазор, который в рамках данной работы равен $S_{\min}$.

Причем Δd распределено по нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением σ.

Минимальная толщина масляной пленки в подшипники скольжения, полученная из гидродинамической теории смазки, на основе формулы Петрова Н.П. имеет вид [11]:

$$h_{\min} = \frac{2\eta\omega r^2}{F} \cdot \frac{S}{r} = K \cdot S,$$

где $K = \frac{2\eta\omega r}{F}$, $h_{\min}$ – минимальная толщина масляной пленки, η – динамическая вязкость масла, ω – угловая скорость вращения вала, r – радиус вала, F – радиальная нагрузка на подшипник, S – зазор между валом и втулкой подшипника

Интенсивность износа, т.е. скорость изменения толщины изношенного слоя, определяется выражением

$$I_w = \frac{dw}{dt} = Ce^{(-\beta h_{\min})} = Ce^{(-\beta KS)},$$

где I_w – интенсивность износа, w – накопленный износ или толщина изношенного слоя, t – время, C – эмпирический коэффициент объёмного износа на единицу нагрузки и пройденного пути, зависящий от материалов, твердости, скорости вращения и давления масла, β – степень защиты пленки, показывает, насколько быстро убывает износ при увеличении $h_{\min}$.

Так как в статье рассматривается статистический подход к оценки времени до наступления критического износа в условиях граничного трения со смазкой, то выражение связывающее его с толщиной масляной пленки h, которая является случайной величиной зависящей от шероховатости, давления масла, температуры и других факторов, будет иметь вид:

$$T = \frac{w^*}{I_w} = \frac{w^*}{C} e^{(\beta KS)}, \quad (2)$$

где T – ресурс до критического износа, w^* – критическая толщина износа, при достижении которой элемент выходит из строя.

Подставляя в (2) выражение (1), получим

$$T = \frac{w^*}{I_w} = \frac{w^*}{C} e^{(\beta K(S_{\min} - \Delta d))}.$$

Вследствие случайного характера величины Δd, величина T также является случайной, логарифм которой имеет нормальное распределение т.е.:

$$\ln T \sim N(\mu_T, \sigma_T),\ \mu_T = \ln\left(\frac{w^*}{C}\right) + \beta K S_{\min},\ \sigma_T = \beta K \sigma.$$

Вероятность безотказной работы двигателя определяется выражением:

$$p(t) = \Pr(T > t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu_T}{\sigma_T}\right), \quad (3)$$

где $\Pr(T > t)$ – вероятность того, что продолжительность работы (T) двигателя превышает заданное время (t), Φ — функция Лапласа.

Средний ресурс двигателя формулой

$$t_p = e^{\left(\mu_T + \frac{\sigma_T^2}{2}\right)}. \quad (4)$$

Рассмотрим пример моделирования для судового дизельного двигателя ДВС 4ЧН 11/12,5.

В качестве исходных данных примем следующие параметры:

– номинальный диаметр вала под подшипник $d_н = 80\ мм$;

– допуск на изготовление вала $T_d = 30\ мкм$;

– погрешность измерения $\Delta_{изм} = \sigma = 3 мкм$;

– диаметр втулки $D_п = 80{,}050\ мм$, минимальный зазор $S_{\min} = 50\ мкм$;

– коэффициенты $C = 2{,}8 \cdot 10^{-5}\ мм/ч$, $\beta = 2{,}1 \cdot 10^5\ м^{-1}$ [5];

– $C = 0{,}022\ Па \cdot с$ (при 90 °С), $\omega = 314\ рад/с$, $r = 0{,}04\ м$, $K = 0{,}176\ м^{-1}$;

– критический износ $w^* = 0{,}03 мм$;

– радиальная нагрузка постоянна $F = 18 кН$.

Определим параметры распределения ресурса до критического износа T

$$\mu_T = \ln\left(\frac{0{,}03}{2{,}8 \cdot 10^{-5}}\right) + 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 0{,}176 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 8{,}825,$$

$$\sigma_T = 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 0{,}176 \cdot 3 \cdot 10^{-6} = 0{,}111.$$

Тогда средний ресурс

$$t_p = e^{\left(8{,}825+\frac{0{,}111^2}{2}\right)} = 6842\ ч.$$

Вероятность того, что вал, имеющий значение диаметра, выходящее за допустимое, будет принят годным, определим на основе значения $A_{мет(\sigma)}$ в соответствии с ГОСТ 8.051-81 [8]. Для квалитетов IT5-IT7 $A_{мет(\sigma)}$ принимают равной 16%. Тогда коэффициент разбраковки m = 5,2 % (5,0…5,4). Таким образом. среди годных деталей может оказаться до 5,2% неправильно принятых деталей с предельными отклонениями:

$$es_в = 0 + 0{,}0075 = +0{,}0075 \text{ мм};$$

$$ei_в = -0{,}03 - 0{,}0075 = -0{,}0375 \text{ мм},$$

т.е. вероятные предельные размеры можно записать $\varnothing 80\ ^{+0{,}0075}_{-0{,}0375}$.

Следовательно, усредненный ресурс партии с учетом неправильной разбраковки определяется следующим образом:

– 94,8% изделий имеют $t_p = 6842\ ч$;

– 5,2 % изделий могут иметь $S_{\min} = 42{,}5\ мкм$ и $t_p = 5186\ ч$.

Тогда средний ресурс партии

$$\overline{t_p} = 0{,}948 \cdot 6842 + 0{,}052 \cdot 5186 = 6755{,}9\ ч.$$

Таким образом снижение ресурса двигателя составляет 1,26 %, при этом снижение ресурса подшипника равно 15%.

Заключение.

Полученные выражения (3) и (4) позволяют определить показатели надежности ДВС с учетом погрешности измерения диаметра вала подшипника скольжения. Показано, что погрешность измерения в 3 мкм (при допуске в 30 мкм) приводит к появлению среди годных деталей до 5,2% неправильно принятых деталей, фактически являющихся бракованными, что снижает ресурс подшипника скольжения на 15%, а ресурс всего двигателя на 1,26%. Исследовано влияние только отклонение диаметра вала, а диаметр втулки подшипника считался измеренным без погрешности.

Следовательно, для увеличения ресурса работы подшипника и как следствие всего двигателя, необходимо уменьшать погрешность измерения.

Основные методы повышения точности измерений приведены в рекомендациях по межгосударственной стандартизации РМГ 64-2003 «ГСИ. Обеспечение эффективности при управлении технологическими процессами. Методы и способы повышения точности измерений». Одним из методов являются многократные измерения, которые не требует использование более точных измерительных устройств. Его преимуществом является, то что для повышения точности предприятию не требуется приобретать новое измерительное оборудование. Недостатком этого метода является увеличение времени контрольных операций. Следовательно, необходимо определять минимально необходимое число измерений, обеспечивающих заданную точность [12-13].

В дальнейшем предполагается построить математическую модель, позволяющую по известной погрешности измерения как диаметра вала, так и

втулки подшипника скольжения определить средний ресурс и вероятность безотказной работы ДВС в целом, а также оценить увеличение ресурса двигателя за счет уменьшения погрешности измерения с использованием метода многократных измерений.

Библиографический список.

1. Щурин К.В. Надёжность мобильных машин : учебник для вузов / К.В. Щурин, В.Е. Тарасенко. – СПб. : Лань, 2024. – 400 с.
2. Зубарев Ю.М. Технологическое обеспечение надежности эксплуатации машин : учебное пособие / Ю.М. Зубарев. – 2-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2018. – 320 с.
3. Зубарев Ю.М. Основы надежности машин и сложных систем : учебник / Ю.М. Зубарев. – 2-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2020. – 180 с.
4. Захаров С.М. Трибологические критерии оценки работоспособности подшипников скольжения коленчатых валов двигателей внутреннего сгорания / С.М. Захаров, И.А. Жаров // Трение и износ. – 1996. – Т. 17. – № 5. – С. 606-615.
5. Тихомиров А.В. Оценка надежности судового оборудования при эксплуатации и проведении морских технологических операций : монография / А.В. Тихомиров. – М. : Русайнс, 2019. – 264 с.
6. Жураева Г.Ш. Работоспособность подшипников скольжения коленчатого вала ДВС / Г.Ш. Жураева, Г.Ш. Тахирова // Universum: технические науки. – 2024. – № 1(118). – С. 42-44.
7. Леонтьев Л.Б. Анализ видов, причин и последствий отказов подшипников коленчатых валов судовых среднеоборотных дизелей / Л.Б. Леонтьев, А.Л. Леонтьев, В.М. Макаров // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 12-2. – С. 283-287.
8. ГОСТ 8.051-81. Государственная система обеспечения единства измерений. Погрешности, допускаемые при измерении линейных размеров до 500 мм. Введ. 23.11.1981. – М. : Государственный комитет СССР по стандартам, 1982. – 12 с.
9. Волошина Н.А. Взаимозаменяемость, стандартизация и технические измерения. Практикум. В 2 томах. Том 1 : учебное пособие для вузов / Н.А. Волошина, О.В. Филипович, Н.А. Балакина [и др.]. – 2-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2026. – 192 с.
10. Леванов И.Г. Методика расчёта ресурса подшипников скольжения на ранних этапах проектирования поршневых и роторных машин / И.Г. Леванов, Е.А. Задорожная, Д.Н. Никитин // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Машиностроение. – 2021. – № 3(21). – С. 5-21.
11. Чичинадзе А.В. Трение, износ и смазка (трибология и триботехника) / А.В. Чичинадзе, Э.М. Берлинер, Э.Д. Браун. – М. : Машиностроение, 2003. – 576 с.
12. Копп. В.Я. Энтропийный подход к анализу метрологических характеристик измерительных приборов в машино- приборостроении / В.Я. Копп, А.И. Балакин, А.А. Скидан [и др.]. – Севастополь: Крымский Издательский Дом, 2020. – 340 с.

13. Копп В.Я. Определение граничной оценки числа многократных двухпараметрических измерений на основе анализа дифференциальной энтропии / В.Я. Копп, А.И. Балакин, О.В. Филипович [и др.] // Вестник СевНТУ. – 2007. – № 83. – С. 168-171.

[1]Балакин Алексей Игоревич, канд. техн. наук, доцент, доцент, AIBalakin@mail.sevsu.ru, Россия, Севастополь, ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет»

Balakin Alexey Igorevich, Candidate of Technical Sciences, Docent, Associate Professor, AIBalakin@mail.sevsu.ru, Russia, Sevastopol, Sevastopol State University

УДК 621.3.083.92;621.341.572

УСТРОЙСТВО БАЛАНСИРОВКИ И ПОЭЛЕМЕНТНОГО ИЗМЕРЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ ЛИТИЕВЫХ БАТАРЕЙ

Бурлака В.В.[1]

DEVICE FOR LITHIUM BATTERIES BALANCING AND PER-ELEMENT VOLTAGE MEASURING

Burlaka V.V.[1]

Аннотация. *В работе предложено схемное решение простого устройства балансировки и поэлементного измерения напряжения аккумуляторных батарей. Схема спроектирована таким образом, что имеет относительно небольшое число элементов, не содержит прецизионных и труднодоступных деталей, позволяет работать с батареями, имеющими разное число элементов. Применение такого устройства позволяет контролировать состояние аккумуляторных батарей путем поэлементного измерения напряжения, а также проводить их балансировку, тем самым продлевая срок эксплуатации батарей. Устройство может служить для организации зарядки литиевых батарей от произвольного источника с подходящими параметрами, обеспечивая балансировку и контроль напряжений элементов.*

Abstract. *In the paper, a circuit topology solution of a simple device for battery balancing and per-element voltage measurement is proposed. The circuit is designed in such a way that it has a relatively small number of components, does not contain precision and hard-to-find parts, and allows working with batteries with different number of elements. The use of such a device allows monitoring the state of batteries by per-element measurement of voltage, as well as balancing them, thus extending the service life of the batteries. The device can be used to organize charging of lithium batteries from an arbitrary source with suitable parameters, providing balancing and control of element voltages.*

Ключевые слова. *Литиевая аккумуляторная батарея, балансировка, измерение напряжения, BMS, цифровой вольтметр.*

Keywords. *Lithium battery, balancing, voltage measurement, BMS, digital voltmeter.*

Введение.

При эксплуатации аккумуляторных батарей, состоящих из последовательно соединенных элементов, возникает необходимость в балансировке (уравнивании) напряжений отдельных элементов батареи. Особенно это критично для батарей на основе лития из-за их высокой

энергоемкости и высокого КПД цикла «заряд-разряд» [1]. Поэтому для максимального продления срока безопасной эксплуатации батареи балансировка напряжений ее элементов является неотъемлемой процедурой, поскольку перезаряд или слишком глубокий разряд отдельного элемента может привести к выходу из строя всей батареи (иногда и к возгоранию – из-за большой удельной энергии элементов на основе лития) [2]. Исходя из этого, балансировка напряжений элементов батареи является актуальной задачей, позволяет повысить безопасность и продлить срок ее эксплуатации.

В подавляющем большинстве случаев (в частности, 3- … 8-элементные литиевые батареи для БПЛА) балансировка батареи обычно выполняется только во время зарядки специализированным зарядным устройством. В процессе разрядки контроля напряжения отдельных элементов зачастую не предусматривается.

Распространенные модули BMS (Battery Management System) выполняют только пассивную балансировку в конце зарядки (путем подключения резистора параллельно полностью заряженному элементу), имеют небольшой ток балансировки и малопригодны в случаях интенсивного использования батареи.

Для активной балансировки напряжений применяются специализированные преобразователи, строящиеся с применением различных схемных решений [3-9].

Хорошими технико-экономическими показателями обладают устройства активной балансировки с многообмоточными трансформаторами [3,5-9]. Так, устройство балансировки [8] выполнено с применением обратноходового трансформатора, что позволяет уменьшить число компонентов устройства балансировки, приходящихся на один элемент батареи; использовать один многообмоточный трансформатор при работе с батареями с разным числом элементов. Однако необходимость выполнения магнитопровода обратноходового трансформатора с немагнитным зазором и сниженной эквивалентной магнитной проницаемостью ведет к увеличению полей рассеяния, снижению коэффициента связи между вторичными обмотками, что ведет к ухудшению балансировочных свойств устройства. Кроме того, в цепи первичной обмотки обратноходового трансформатора необходимо принимать меры по ограничению импульсных перенапряжений, вызванных запасанием энергии в поле рассеяния – применять диссипативные либо рекуперативные снабберные цепи. В первом случае это увеличивает потери мощности, во втором – усложняет схему и алгоритмы управления.

От этих недостатков свободны устройства с двухтактным режимом работы многообмоточного трансформатора [9], что позволяет выполнить его с малым рассеянием (благодаря отсутствию немагнитных зазоров в магнитной цепи), улучшив магнитную связь между вторичными обмотками, что ведет к улучшению балансировочных свойств устройства. Однако использование выпрямителей по схеме с удвоением напряжения все же может приводить к подмагничиванию магнитопровода трансформатора при несимметричных напряжениях элементов подключенной батареи, что приводит к необходимости расчета трансформатора с учетом этого обстоятельства. Кроме того, питание первичной обмотки трансформатора от генератора переменного напряжения может приводить к тепловому «разгону» отдельных выпрямителей из-за отрицательного температурного коэффициента прямого падения напряжения на диодах. При повышении температуры отдельного диода его прямое напряжение падает, что ведет к росту тока через него, а следовательно, и к дальнейшему

росту температуры. Эта особенность отмечена и в описании [9]. Также к особенностям устройств балансировки с двухтактным режимом работы следует отнести жесткую привязку коэффициента трансформации многообмоточного трансформатора к количеству элементов в балансируемой батарее, что делает невозможным работу с батареями с иным числом элементов без дополнительных коммутаций в цепи первичной обмотки трансформатора.

Целью настоящей работы является создание несложного в изготовлении устройства балансировки напряжений элементов аккумуляторной батареи, обеспечивающего работу с аккумуляторными батареями, имеющими разное число элементов, а также схемы поэлементного измерения напряжений элементов подключенной батареи.

Основная часть.

Авторами предложена конструкция устройства балансировки, в котором устранены указанные выше недостатки. Принципиальная электрическая схема разработанного устройства балансировки приведена на Рис.1.

Схема содержит полумостовой генератор на транзисторах VT1 и VT2, управляемых от драйвера DD1 в типовом включении, нагруженный через токоограничивающий дроссель L1 на первичную обмотку T1.1 многообмоточного трансформатора. К вторичным обмоткам T1.2-T1.4 этого трансформатора подключены двухполупериодные выпрямители VD2-VD13, C7-C12, нагруженные на элементы аккумуляторной батареи G1-G6. Конденсаторы C5, C6 формируют среднюю точку с половинным напряжением.

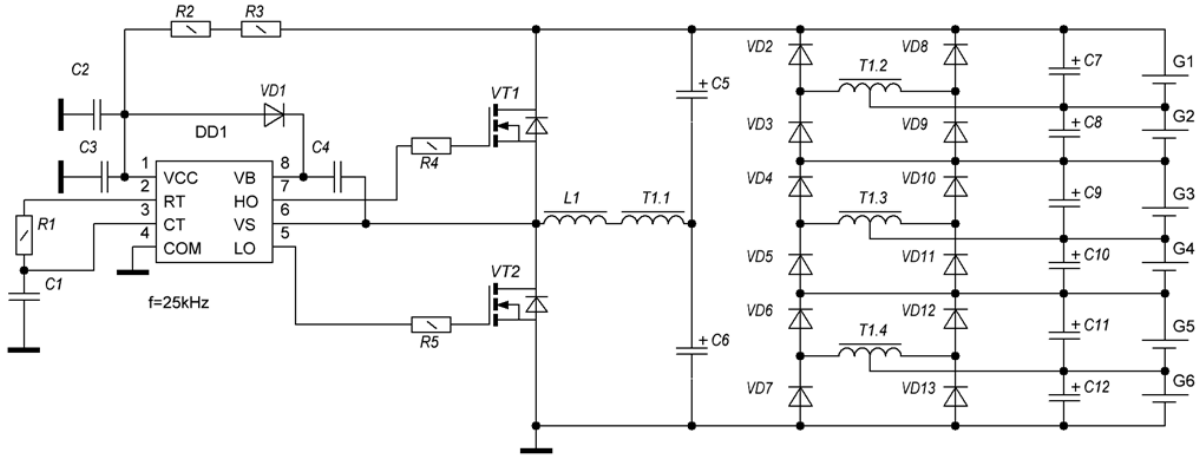


Рис.1 – Схема электрическая принципиальная устройства балансировки

Предложенное устройство балансировки напряжений элементов аккумуляторной батареи работает следующим образом.

Драйвер DD1 управления затворами обеспечивает поочередное открытие транзисторов VT1 и VT2 с коэффициентом заполнения около 50 % и небольшими бестоковыми паузами для исключения сквозного тока. В результате на выходе полумоста VT1VT2 появляется меандр с амплитудой, равной напряжению батареи U_B, а на конденсаторах C5 и C6 устанавливаются равные напряжения $\frac{U_B}{2}$ Переменное напряжение с амплитудой $\frac{U_B}{2}$, приложенное к дросселю L1 и обмотке T1.1, вызывает появление ЭДС в обмотках T1.2-T1.4, отпиранию соответствующих диодов выпрямителей VD2-VD13 и протеканию

тока через них и через элементы батареи. Коэффициент трансформации T1 выбран так, что приведенное к обмотке T1.1 напряжение существенно ниже, чем $\frac{U_B}{2}$, а это ведет к тому, что ток обмотки T1.1 будет определяться преимущественно реактивным сопротивлением дросселя L1. Таким образом резко уменьшается зависимость указанного тока от прямого падения напряжения на диодах VD2-VD13.

В случае неодинаковых напряжений элементов батареи больший ток будет идти через тот выпрямитель, к выходу которого подключен элемент с наименьшим напряжением. Для максимальной эффективности балансировки трансформатор T1 должен быть выполнен с максимальной магнитной связью между обмотками T1.2-T1.4, а диоды выпрямителей VD2-VD13 должны быть одинакового типа и иметь тепловой контакт.

Пренебрегая реактивными сопротивлениями C5 и C6, а также считая дроссель L1 линейным, можно показать, что амплитуда тока в L1 будет равна

$$L_m = \frac{1}{4_{L_1} f}\left[\frac{U_B}{2} - \left(\frac{U_B}{N} - U_F\right)\frac{w_1}{w_2}\right],$$

где L_1 – индуктивность дросселя L1; f – частота переключения VT1, VT2; U_F – прямое напряжение диодов выпрямителей VD2-VD13; w_1 – число витков обмотки T1.1; w_2 – число витков половинок обмоток T1.2-T1.4 (они равны); N – число элементов аккумуляторной батареи (для схемы Рис.2 $N = 6$).

Считая напряжения элементов G1-G6 равными, диоды VD2-VD13 одинаковыми по характеристикам, трансформатор T1 симметричным относительно обмоток T1.2- T1.4, можно записать средний ток диодов VD2-VD13:

$$I_{AVG} = \frac{I_m}{2}\frac{w_1}{w_2}\frac{1}{2N} = \frac{1}{16N_{L_1} f}\left[\frac{U_B}{2}\frac{w_1}{w_2} - \left(\frac{U_B}{N} - U_F\right)\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2\right].$$

Наличие ненулевого среднего тока через диоды выпрямителей приводит к снижению их дифференциального сопротивления, что улучшает балансировочные свойства устройства. Кроме того, ток I_{AVG} слабо зависит от U_F, что предотвращает тепловой «разгон» отдельных выпрямителей в случае сильной разбалансировки напряжений элементов батареи.

Взяв производную

$$\frac{dI_{AVG}}{d\left(\frac{w_1}{w_2}\right)} = \frac{1}{16NL_1 f}\left[\frac{U_B}{2} - 2\left(\frac{U_B}{N} - U_F\right)\frac{w_1}{w_2}\right]$$

и приравняв ее к нулю, получим условие экстремума тока диодов. В данном случае экстремум является максимумом, поскольку

$$\frac{d^2 I_{AVG}}{d\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2} = \frac{-1}{8NL_1 f}\left(\frac{U_B}{N} - U_F\right) < 0.$$

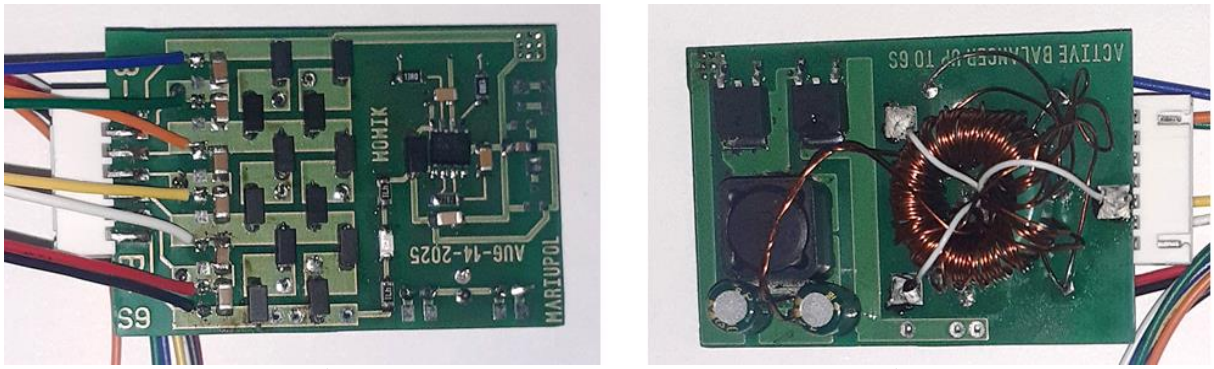
Тогда выражение для максимального тока примет вид:

$$I_{AVG} : \frac{w_1}{w_2} = \frac{\frac{U_B}{2}}{2\left(\frac{U_B}{N} - U_F\right)} = \frac{1}{4\left(\frac{1}{N} - \frac{U_F}{U_B}\right)}.$$

Это условие соответствует минимуму выходного сопротивления схемы и максимальной эффективности балансировки. Заметим, что при использовании схемы с батареями, имеющими разное число элементов, в качестве N следует брать количество выходных выпрямителей в схеме. В рассматриваемом примере $N = 6$.

В экспериментальном образце устройства балансировки напряжений элементов аккумуляторной батареи генератор выполнен на микросхеме DD1 IR2153S и работает на частоте 25 кГц, транзисторы VT1, VT2 применены типа AOD2144, конденсаторы C5, C6 – 100 мкФ×25 В, токоограничивающий дроссель L1 типа CDRH127 с индуктивностью 56 мкГн, выпрямители VD2-VD13 выполнены на диодах Шоттки SS12, конденсаторы C7-C12 – 100 мкФ×6,3 В, многообмоточный трансформатор выполнен на ферритовом кольце T18×12×8; обмотка T1.1 имеет 18 витков, обмотки T1.2-T1.4 – по 24 витка с отводом от середины. Аккумуляторная батарея (G1-G6) – 6-элементная литий-полимерная, емкостью 1500 мА·ч.

На Рис.2 приведены фото внешнего вида устройства балансировки.



а) б)

Рис.2 – Внешний вид (с двух сторон) платы макета разработанного устройства балансировки напряжений элементов аккумуляторной батареи

Использование выпрямителей VD2-VD13, выполненных по двухполупериодной схеме, позволило исключить подмагничивание сердечника многообмоточного трансформатора T1 при любом уровне рассогласования напряжений элементов батареи G1-G6, что позволяет максимально использовать магнитопровод T1, а также улучшить стабильность работы схемы.

Более того, корректная работа устройства возможна и при числе элементов батареи, меньшем, чем 6. Для этого достаточно посредством

балансировочного разъема выполнить подключение элементов батареи вместо G1-G6, в любом порядке. Например, 4-элементную батарею можно включить на место G1-G4, либо G2-G5, либо G3-G6.

Подключение силового разъема батареи при использовании устройства балансировки не требуется, что упрощает эксплуатацию и позволяет выполнять балансировку напряжений во время зарядки или разрядки батареи. Так, например, для зарядки можно использовать любой подходящий источник питания, подключенный к силовым клеммам батареи, а уравнивание напряжений элементов обеспечить путем подключения описываемого устройства к балансировочному разъему батареи.

Для оценки эффективности устройство балансировки напряжений элементов аккумуляторной батареи в ходе экспериментов осуществлен замер выходного сопротивления приемника ($\partial U/\partial I$) относительно одного из элементов АКБ при изменении напряжения на нем. Результат составил 0,35 Ом при работе с 6-элементной литий-полимерной батареей. Следует отметить, что расчетное выходное дифференциальное сопротивление выпрямителей ($r_D \approx \frac{U_T}{2I_{AVG}}$, где U_T – термический потенциал, равный 26 мВ при комнатной температуре, а коэффициент 2 появляется из-за двухполупериодной схемы выпрямления) при описанных выше параметрах составляет примерно 0,23 Ом, а разница с результатом измерения приходится на сопротивление рассеяния трансформатора. При отключении обмотки T1.1 выходное сопротивление стремится к бесконечности (т.е. изменение напряжения на одном из элементов АКБ не приводит к изменению тока его заряда или разряда с целью балансировки).

Для контроля напряжений на элементах балансируемой батареи разработан простой измеритель, принципиальная схема которого приведена на Рис.3.

Схема построена на основе однокристального микроконтроллера STM32F030F4P6 [10], имеющего небольшую стоимость и достаточный набор бортовой периферии для решения поставленной задачи.

При проектировании схемы измерителя преследовалась цель максимального упрощения конструкции и избегания применения прецизионных или труднодоступных компонентов.

Измеряемые напряжения элементов батареи подключены к неивертирующим входам компараторов микросхем DA1 (счетверенный компаратор) и DA2 (сдвоенный компаратор). Резисторы R2, R4-R7 – защитные и предназначены для ограничения входного тока в переходном процессе при подключении батареи к разъему. Дело в том, что входные каскады примененных компараторов имеют эмиттерные повторители на p-n-p транзисторах, и в случае попадания на вход потенциала ниже, чем потенциал общего провода, произойдет открытие коллекторного перехода входного транзистора. Если при этом не ограничить входной (базовый) ток, это может привести к выходу микросхемы из строя.

Инвертирующие входы всех компараторов подключены к конденсатору C7 и делителю R1R3R8R9.

Примененные компараторы имеют выходы с открытым коллектором. Они подключены к цифровым входам контроллера DD1 с включенными внутренними «подтягивающими» резисторами.

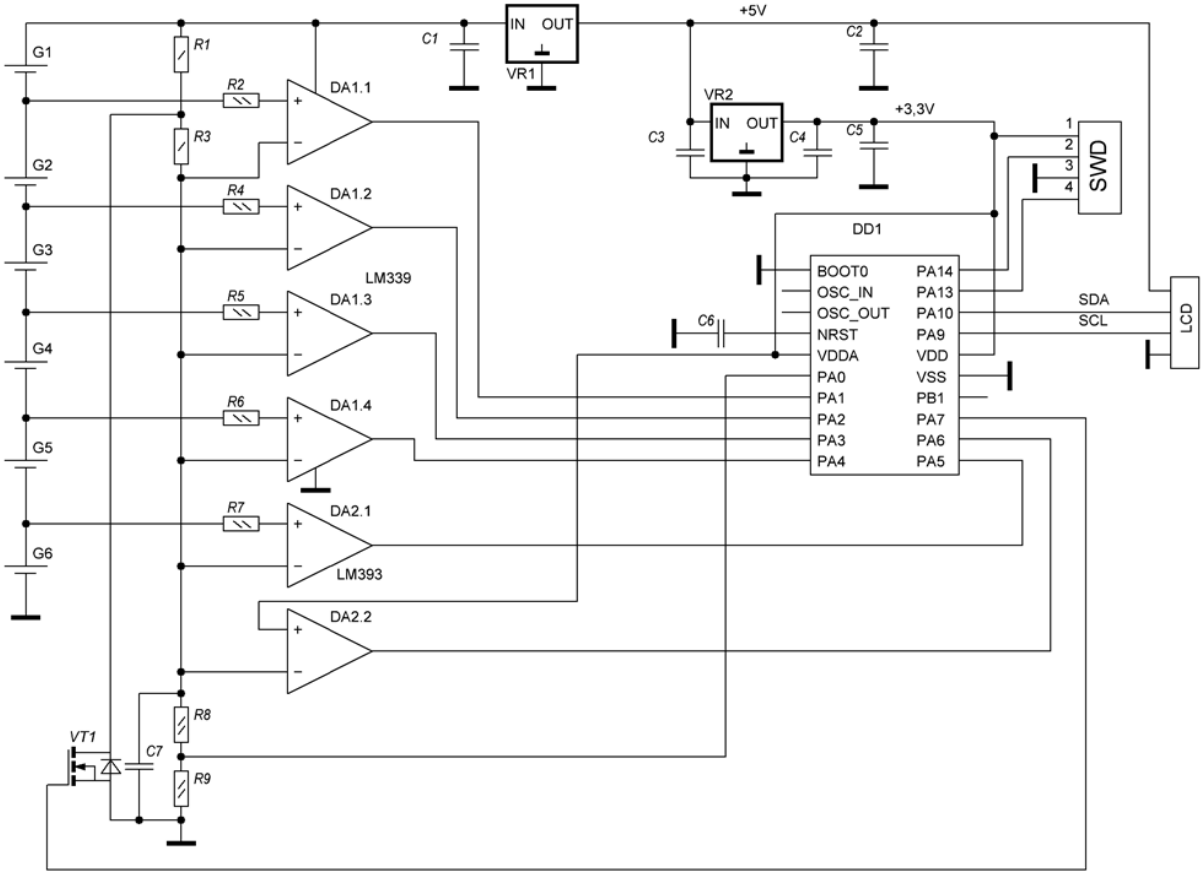


Рис.3 – Принципиальная схема измерителя напряжения на элементах батареи

Особенностью разработанной схемы является делитель напряжения R1R3R8R9, к которому подключен шунтирующий транзистор VT1 и сглаживающий конденсатор C7. Алгоритм измерения напряжений элементов батареи следующий.

Сначала измеряется полное напряжение батареи, для чего VT1 закрывается, выдерживается пауза для полного заряда C7 (для установления с точностью 0,1 % это время $\Delta t > 7 \cdot C_7 \frac{(R_1 + R_3)(R_8 + R_9)}{R_1 + R_3 + R_8 + R_9}$ и производится оцифровка напряжения на R9 посредством бортового 12-битного аналого-цифрового преобразователя (АЦП) DD1. Цепь VT1R1R3R8R9C7 при этом ведет себя как обычный делитель напряжения с коэффициентом передачи

$$K_1 = \frac{R_9}{R_1 + R_3 + R_8 + R_9}.$$

Затем производится измерение напряжения на неинвертирующих входах компараторов. Для этого состояние выхода интересующего компаратора программно инвертируется контроллером DD1 и выставляется на порт PA7, к которому подключен затвор VT1. То есть, если напряжение на неинвертирующем входе компаратора больше, чем напряжение на C7, то VT1 закрывается и C7 заряжается через R1. В противном случае VT1 открывается и

C7 разряжается через R3 (делитель R8R9 имеет сопротивление, на порядок большее, чем R1 и R3, поэтому его влиянием можно в первом приближении пренебречь). В результате система приходит в состояние, при котором среднее напряжение на C7 равно напряжению на неинвертирующем входе интересующего компаратора. Далее производится измерение напряжения на выходе делителя R8R9, подключенного к C7, и его программное усреднение (низкочастотная фильтрация). Расчет напряжения на C7 производится программно с учетом коэффициента передачи делителя R8R9, равного $K_2 = \frac{R_9}{R_8 + R_9}$.

Таким образом, повторяя описанный выше алгоритм для каждого компаратора, производится измерение всех входных напряжений схемы, после чего вычисляются напряжения на каждом из элементов подключенной батареи.

Для снижения требований к точности коэффициентов передачи делителей напряжения, а также к напряжению стабилизатора VR2, являющегося опорным для АЦП DD1, применены следующие меры.

Микроконтроллер DD1 позволяет измерить напряжение питания, используя встроенный источник опорного напряжения (ИОН) и записанные в ПЗУ результаты измерения напряжения ИОН при напряжении питания, с высокой точностью равном +3,3 В. Это позволяет измерить выходное напряжение стабилизатора VR2, от которого питается DD1.

Далее, неинвертирующий вход компаратора DA2.2 подключен к напряжению питания DD1, что позволяет путем его измерения по алгоритму, описанному выше, вычислить коэффициент K_2. Таким образом, влияние отклонения величин сопротивлений R8 и R9 на результаты измерений будет существенно ослаблено. Коэффициент K_1 программно рассчитывается, исходя из того, что

$$K_1 = K_2 \cdot \frac{R_8 + R_9}{R_1 + R_3 + R_8 + R_9}.$$

Таким образом, с учетом описанных мер, ошибка измерения определяется главным образом интегральной нелинейностью бортового АЦП DD1 (которая по документации составляет не более 1,7 LSB, типовое значение 1,2 LSB) и напряжением смещения компараторов (максимальное 5 мВ, типовое 2 мВ).

Отображение результатов измерений осуществляется на текстовом жидкокристаллическом индикаторе 16×2 знакоместа с контроллером HD44780. Для снижения количества проводников использован I^2C расширитель интерфейса PCF8574. На схеме индикатор обозначен как LCD и питается напряжением +5 В от стабилизатора VR1. Стабилизатор VR2, как было сказано выше, предназначен для получения напряжения +3,3 В для питания контроллера DD1.

Максимальное напряжение батареи, при котором возможна нормальная работа схемы, определяется параметрами примененных компараторов DA1, DA2 и стабилизатора VR1, и составляет 35 В. Этого достаточно для работы с батареями на основе лития, содержащими до 8 элементов. При необходимости измерять напряжения 8-элементной батареи в схему следует ввести два дополнительных компаратора (что легко сделать, применив в качестве DA2 счетверенный компаратор, как и DA1). На Рис.4 приведено фото изготовленного образца описанного измерителя напряжений.

Рис.4 – Внешний вид измерителя напряжения на элементах батареи

Следует также отметить, что при использовании измерителя напряжения как самостоятельного устройства (без использования описанной схемы балансировки) с батареей, содержащей менее 6 элементов, следует подключать не только балансировочный, но и силовой разъем батареи. В противном случае схема измерителя не будет корректно получать питание.

При использовании измерителя в комплексе со схемой балансировки никаких дополнительных коммутаций не требуется – достаточно подключить только балансировочный разъем батареи, независимо от числа элементов.

Свободные выводы контроллера DD1 могут быть использованы в качестве дискретных входов или выходов.

Например, можно осуществлять заряд литиевой батареи от любого источника питания с подходящими параметрами, при этом балансировка и контроль напряжения осуществляется описанным в настоящей работе устройством, а один из выводов DD1 может использоваться для отключения источника питания по достижении конца заряда. Вывод PB1 контроллера DD1 при этом целесообразно использовать для реализации измерения температуры заряжаемой батареи с помощью встроенного или внешнего термистора.

Заключение.

Предложено схемное решение и разработано программное обеспечение простого устройства балансировки и поэлементного измерения напряжения литиевых батарей, пригодного для работы с батареями, имеющими от 3 до 6 элементов, соединенных последовательно. Схема может быть легко модифицирована для работы с батареями, имеющими более 6 элементов. Устройство не содержит прецизионных или труднодоступных компонентов, имеет несложную схему и небольшую себестоимость.

Применение предложенного устройства балансировки напряжений элементов аккумуляторной батареи и поэлементного измерения напряжения позволит повысить безопасность эксплуатации батареи и продлить срок ее

службы за счет выравнивания степени износа (старения) элементов и контроля их состояния заряда.

Дальнейшим направлением работы является модификация схемы и программного обеспечения контроллера для повышения универсальности и расширения области применения. В частности, перспективной задачей представляется реализация измерения внутреннего сопротивления каждого из элементов батареи для определения их состояния.

Работа выполняется при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания FRRG-2023-0008.

Библиографический список.

1. Brisilla A.M. Modeling of Lithium-ion Batteries : An Overview / A.M. Brisilla, S.M. Brisilla, R.M. Brisilla // Innovations in Power and Advanced Computing Technologies (i-PACT), Kuala Lumpur, Malaysia, 27-29 November 2021. – Piscataway, NJ, USA : IEEE Operations Center, 2022. – 9 p. – DOI: 10.1109/i-PACT52855.2021.9696920.
2. Languang L. A review on the key issues for lithium-ion battery management in electric vehicles / L. Languang, H. Xuebing, L. Jianqiu [et al.] // Journal of Power Sources. – Vol. 226. – 2013. – P. 272-288. – DOI: 10.1016/j.jpowsour.2012.10.060.
3. Uno M. Single-Switch Single-Transformer Cell Voltage Equalizer Based on Forward–Flyback Resonant Inverter and Voltage Multiplier for Series-Connected Energy Storage Cells / M. Uno, A. Kukita // In IEEE Transactions on Vehicular Technology. – 2014. – Vol. 63. – Iss. 9. – P. 4232-4247. – DOI: 10.1109/TVT.2014.2312381.
4. Hannan M.A. Charge Equalization Controller Algorithm for Series-Connected Lithium-Ion Battery Storage Systems: Modeling and Applications / M.A. Hannan, M.M. Hoque, P.J. Ker [et al.] // Energies. – 2017. – № 9:1390. – P. 2–20. – DOI: 10.3390/en10091390.
5. Shang Y. An Automatic Equalizer Based on Forward-Flyback Converter for Series-Connected Battery Strings / Y. Shang, B. Xia, C. Zhang [et al.] // In IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2017. – Vol. 64. – Iss. 7. – P. 5380-5391 – DOI: 10.1109/TIE.2017.2674617.
6. Y. Chen A single-magnetic cell-to-cell battery equalization converter / Y. Chen, X. Liu, Y. Cui [et al.] // International Power Electronics and Application Conference and Exposition, Shanghai, China, 05-08 November 2014. – Piscataway, NJ, USA : IEEE Operations Center, 2015. – P. 1076-1081. – DOI: 10.1109/PEAC.2014.7038010.
7. Cao Y. Balancing Method Based on Flyback Converter for Series-Connected Cells / Y. Cao, K. Li, M. Lu // In IEEE Access, 2021. – Vol. 9. – P. 52393-52403. – DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3070047.
8. Park S.-H. Single-Magnetic Cell-to-Cell Charge Equalization Converter With Reduced Number of Transformer Windings / S.-H. Park, K.-B. Park, H.-S. Kim [et al.] // In IEEE Transactions on Power Electronics. – 2012. – Vol. 27. – Iss. 6. – P. 2900-2911. – DOI:10.1109/TPEL.2011.2178040.
9. Moghaddam A.F. A single transformer for active cell equalization method of lithium-ion batteries with two times fewer secondaries than cells / A.F. Moghaddam, A.V. Bossche // Electronics. – 2019. – Vol. 8. – № 9(951). – P. 2-16. – DOI: 10.3390/electronics8090951.

10. STM32F030x4 STM32F030x6 STM32F030x8 STM32F030xC. Value-line Arm®-based 32-bit MCU with up to 256 KB Flash, timers, ADC, communication interfaces, 2.4-3.6 V operation : Datasheet - production data // STMicroelectronics. – Datasheet, Rev. 5. – 2017. – 93 p. – Text : electronic – URL: https://static.chipdip.ru/lib/724/DOC002724291.pdf (date of request: 05.11.2025).

[1]Бурлака Владимир Владимирович, д-р техн. наук, доцент, директор Научно-технического центра, vburlaka@rambler.ru, Россия, Мариуполь, ФГБОУ ВО «Приазовский государственный технический университет» – филиал НИУ МГСУ

Burlaka Vladimir Vladimirovich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Head of Department, vburlaka@rambler.ru, Russia, Mariupol, Pryazovskyi State Technical University – branch of the National Research University Moscow State University of Civil Engineering

АВТОМАТИЗАЦИЯ И ИЗМЕРЕНИЯ В МАШИНО- ПРИБОРОСТРОЕНИИ

Научный журнал

16+

Выпуск №2(34) 2026 г.

Рубрики в соответствии с номенклатурой научных специальностей:

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

2.2.8. Методы и приборы контроля и диагностики материалов, изделий, веществ и природной среды

2.3.3. Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами

Адрес редакции:
299053, г. Севастополь, ул. Университетская, д. 33.
Телефон редакции: 8(8692)435002
https://www.sevsu.ru/nauka/nt-potencial/pechat-izdaniya-vedushim/avtomatizatsiya-i-izmereniya-v-mashino-priborostroenii
e-mail: appr.sevgu@yandex.ru
Отпечатано в издательстве СевГУ,
адрес типографии ФГАОУ ВО СевГУ:
299015, г. Севастополь, ул. Курчатова 7.

Публикуемые материалы прошли обязательную процедуру рецензирования и экспертного отбора. Авторы опубликованных материалов несут полную ответственность за подбор и точность приведенных фактов, цитат, данных, имен собственных и прочих сведений.

Редакция не несет ответственности за нарушение авторами исключительных прав на результаты интеллектуальной деятельности третьих лиц. Мнение редакционной коллегии может не совпадать с позицией авторов статей. При перепечатке материалов ссылка на научный журнал «Автоматизация и измерения в машино- приборостроении» обязательна.

Учредитель и издатель
ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет» ул. Университетская, 33.
Севастополь, 299053.

Зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
№ рег. СМИ: ПИ№ФС77-73958 от 12.окт. 2018 г.

Главный редактор: Филипович Олег Викторович

Подписано к печати 29.05.2026 . Заказ 12/2026 . Дата выхода в свет:29.06.26. Тираж: 50 экз.
Цена свободная. Формат 60×84/8. Бумага офсетная. Объем усл. печ. л. 13,95 .

Севастополь, 2026